高等学校试用教材

勒贝格积分与泛函分析基础

熊洪允　邱忠文　陈荣胜　编

高等教育出版社

（京）112号

内容提要

本书于1987年经国家教委工科院校应用数学专业教材委员会评选，推荐作为教材.

全书共分八章，前两章集论和度量空间是基础知识部分，三、四章是实变函数部分，后四章是泛函分析部分.

本书可作为应用数学专业和数学专业的教材，也可作为工科有关专业研究生的教材.

高等学校试用教材

勒贝格积分与泛函分析基础

熊洪允　邱忠文　陈崇胜　编

*

高等教育出版社出版

新华书店总店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168　1/32　印张 12.875　字数 310 000

1992　年5月第1版　1992　年5月第1次印刷

印数0 001—1 325

ISBN 7-04-003390-9/O·1036

定价4.65元

序

实变函数与泛函分析作为现代数学的重要分支，其概念和方法已经广泛应用于数学中的众多方面，而且对自然科学、工程技术理论以及人文科学中的许多领域的应用也日益广泛，成为这些领域开展研究的一个必备的数学基础.

因此，近年来我国高等工科院校应用数学专业普遍都开设了《实变函数与泛函分析》课，国家教委高等工业学校应用数学专业教材委员会也正式把《实变函数与泛函分析》定为该专业的一门必修课．本书稿就是由这个教材委员会审查通过并推荐作为教材正式出版的.

本书作者多年从事《实变函数与泛函分析》课程的讲授，积累了丰富的教学经验，在原有讲义基础上，又经过多次反复修改，才最后形成书稿．书中系统地介绍了实变函数与泛函分析的基本概念和方法；并且对概念和方法的引入与阐述格外注意深入浅出与直观背景；全书层次分明、重点突出；对度量空间等部分的安排与处理具有一定特色；文字叙述流畅易懂；另外每章之后还配有难易适当的习题，便于读者的学习和领会.

本书对高等工科院校不少有关专业的教师、研究生和高年级本科生，以及相关的工程技术人员和科研工作者都不失为一本有价值的参考书.

吴从炘

1990年3月8日于哈尔滨工业大学

编者的话

本书是按照高等工业学校应用数学专业教材委员会为实变函数与泛函分析课程制定的基本要求编写的．编者根据自己教授这门课程的教学体验，于1986年底写成初稿（讲义），并在我校应用数学专业教学中试用．在此基础上，经过修改才形成此书．

本书与现行教材在编排上不同的是，把度量空间的内容提到了前面．数直线作为一种特殊的度量空间包含在其中．学生在学习中不会感到困难．同时也节省了一些学时．实变函数部分仅介绍了有关Lebesgue积分的内容．目的是使学生有较多的时间学习泛函分析部分的内容．本书的前两章是全书的基础知识，即集论基础和度量空间．实变函数部分（第三、四章）以Lebesgue积分为主要内容，包括Lebesgue测度，可测函数和Lebesgue积分．在泛函分析部分（第五、六、七、八章）中，详细介绍了赋范线性空间，Banach空间，内积空间和Hilbert空间中的基本概念、基本定理和泛函分析的基本方法．简要地介绍了一般谱论的基础知识及紧算子的谱理论．每一节的后面都附有一定数量的习题，它们是本书内容的一个补充．书中定义，引理、定理、公式、插图按章编号．例如"定理2.3"是指在同一章中第二节的定理的序号，不同章的定理序号都在前面加上章的编号．全书计划学时约110～128学时．教师可根据不同的情况酌情减少内容和学时．

在本书的编写过程中，我们参考了国内外许多现行教材，从中受益匪浅，如夏道行等编写的《实变函数论与泛函分析》，郑维行和王声望编写的《实变函数与泛函分析概要》，程其襄等编写的《实变函数与泛函分析基础》，龚怀云等编写的《应用泛函分析基础》，李延保和楼宇同编写的《应用泛函基础》，H. L. Royden编写的

《*Real Analysis*》, E. Kreyszig 编写的《*Introductory Functional Analysis with Applications*》等.

为了本书的出版，哈尔滨工业大学吴从炘教授认真仔细地审阅了全书，提出了具体修改意见，并为本书作序. 编者在此表示衷心感谢.

1987年，此书初稿作为参加评选的教材经过兄弟院校的专家和同行的评审和评议，大家提出了很多有益的修改意见. 我系陈志敏副教授在教学中试用此书的初稿，提出了很好的建议. 高等教育出版社的编辑为本书的出版作了文字的加工和精心的编辑. 编者向以上各位致以衷心的谢意.

由于编者学识水平所限，书中错误与不妥之处，敬请专家和读者不吝指正.

编者

1990年7月于天津大学

目　录

第一章　集合与映射

§1　集合及其运算

集合(或称为集)是数学中的一个基本概念，也是人们能够直观理解的一个概念. 如同几何学中的“点”与“直线”的概念一样，很难给“集合”下一个严格的定义. 所谓集合(set)，就是指具有确定的内容或适合一定的条件的事物的全体. 集合中的“事物”称为集合的元素(element). 若A是集合，x是A的元素，则我们记$x\in A$(读作x属于A)；若x不是A的元素，则记$x\notin A$，或$x\overline{\in}A$(读作x不属于A). 例如，A是由全体自然数组成的集合，那么每一个自然数当然都是集合A的元素. 1是A的元素，记为$1\in A$；而-1不是A的元素，记为$-1\notin A$.

通常，我们用大写字母A,B,E,X,Y等表示集合，而用小写字母a,b,e,x,y等表示集合的元素.

我们把满足某种条件或性质$p(x)$的元素x的全体记为如下集合

$$\{x\mid p(x)\}.$$

例如，方程$x^2-1=0$的解的全体是数集$\{x\mid x^2-1=0\}$. 显然这个集合中的元素可以列举出来，表示为$\{-1,1\}$. 一般地说，如果集合A的所有元素都能依次列举出来，我们可以把它们写在大括号里表示集合A. 比如，A是由全体自然数组成的集合，则可记$A=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$. B是由元素a,b,c所组成的集合，则可记$B=\{a,b,c\}$. 用列举法表示集合，既简单又明了，而且使用很方便.

本书常用以下字母表示下列集合：

$\mathbf{N}$ 表示全体自然数组成的集合，即 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

$\mathbf{R}$ 表示全体实数组成的集合(有时也称 $\mathbf{R}$ 为数直线)；

$\mathbf{Z}$ 表示全体整数组成的集合，即 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,\ -1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

$\mathbf{Q}$ 表示全体有理数组成的集合；

$\mathbf{C}$ 表示全体复数组成的集合.

例 1 实直线 $\mathbf{R}$ 上的闭区间$[0,1]$ 表示所有满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的实数 x 的全体，可记为

$$[0,1]=\{x \mid x\in\mathbf{R},0\leqslant x\leqslant 1\},$$

或者简单地记为$\{x\in\mathbf{R} \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$.

例 2 闭区间 $[0,\ 1]$ 上的连续函数的全体组成的集，记为 $C[0,1]$，即

$$C[0,1]=\{f \mid f\text{ 是}[0,1]\text{上的连续函数}\}.$$

我们把只有有限个元素的集合称为有限集 (finite set). 把不含任何元素的集合称为空集(empty set)，空集常用 $\varnothing$ 表示. 例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解组成的集合是空集，可记

$$\{x\in\mathbf{R} \mid x^2+1=0\}=\varnothing.$$

既非空又非有限的集合称为无限集(infinite set).

设 A 和 B 是两个集. 若对于每一个 $x\in A$ 必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的子集(subset)，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$)，读作 A 含于 B(或者 B 包含 A). 若 $A\subset B$ 且 $A\supset B$，即 A 与 B 中的元素完全相同，则称 A 和 B 相等(equal)，记为 $A=B$. 若 A 和 B 不相等， 则记为 $A\neq B$. 若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集(proper subset)，记为 $A\subsetneqq B$.

对于任意的集 A，我们规定 $\varnothing\subset A$.

例如，设 $A=\{2,4,6\}$，$B=\{4,2,6\}$，$C=\{4,2,6,0\}$，则 $A=B$，

$A\subset C$ 或者更准确地说 $A\subsetneqq C$.

下列性质是明显的:

(1) 对于任何集 A,都有 $A\subset A$,

(2) 若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$,则 $A\subset C$,

(3) $x\in A$ 当且仅当单点集 $\{x\}\subset A$.

设 A 和 B 是两个集. 由集 A 与集 B 所共有的元素组成的集称为 A 与 B 的交(intersection),记为 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

由集 A 与集 B 的一切元素组成的集称为 A 与 B 的并(union),记为 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

由属于集 A 而不属于集 B 的元素组成的集称为 A 与 B 的差(difference),记为 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A \text{ 而 } x\notin B\}.$$

若 $B\subset A$, 则差集 $A\backslash B$ 称为 B 关于 A 的余集或者补集(Complement set),记为 $\mathscr{C}_A B$,即

$$\mathscr{C}_A B=A\backslash B.$$

当我们的讨论限制在某一个固定集 X(称之为基本集) 的子集范围内时,X 的子集 B 关于 X 的余集 $\mathscr{C}_X B$ 简记为 $\mathscr{C}B$ 或 B^c,并称它为 B 的余集或补集.

上面定义的几个概念,容易从下面的图示中得到直观的理解.

两个集的交与并的定义可以推广到一般的情况. 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是一族集合,即对于每一个 $\alpha\in D$ 可确定一个集 A_α, 称 D 为指标集(index set). 这一族集的交 $\bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha$ 与并 $\bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha$ 定义为

$$\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x\mid \text{对于每一个 } \alpha\in D \text{ 皆有 } x\in A_\alpha\},$$

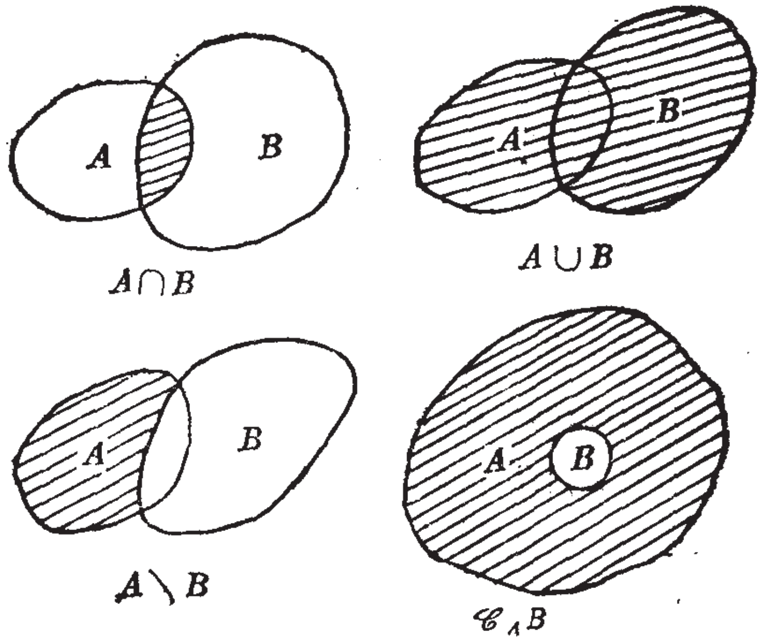


图 1.1

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha=\{x\,|\,\text{存在 }\alpha\in D,\text{使得 }x\in A_\alpha\}.$$

设X是基本集. 从上面的定义,容易看出下列性质成立.

(1) 若 $A\subset B$,则 $A\setminus B=\varnothing$.

(2) $A\setminus B\subset A$.

(3) $A\setminus B=A\cap B^c$.

(4) $(A\setminus B)\cap B=\varnothing$.

(5) $A\cup A^c=X, A\cap A^c=\varnothing$.

(6) $X^c=\varnothing, \varnothing^c=X$.

(7) $(A^c)^c=A$.

(8) 若 $A\subset B$,则 $A^c\supset B^c$.

(9) 若 $A\cap B=\varnothing$,则 $A\subset B^c$ 且 $B\subset A^c$.

(10) 若对每一个 $\alpha\in D$ 皆有 $A_\alpha\subset B$,则 $\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha\subset B$.

(11) 若对每一个 $\alpha\in D$ 皆有 $A_\alpha\supset B$,则 $\bigcap_{\alpha\in D} A_\alpha\supset B$.

下面我们总假定X是基本集. 集合有下面运算性质.

定理 1.1 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是一族集,$A,B,C$是集,则

(1) 交换律: $A\cap B=B\cap A, A\cup B=B\cup A$.

(2) 结合律: $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$,

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

(3) 分配律: $\left(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cup A=\bigcap_{\alpha\in D}(A_\alpha\cup A)$,

$$\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A=\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A).$$

(4) $A\cap A=A, A\cup A=A$.

证明 只证(3)的第二式,其余的证明类似.

对于任意的 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A$,则$x\in\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$且$x\in A$. 于是,存在$\alpha_0\in D$使$x\in A_{\alpha_0}$,且$x\in A$,从而$x\in A_{\alpha_0}\cap A$. 故$x\in\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$,即$\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A\subset\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$.

另一方面,对于任意的$x\in\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$,则存在$\alpha_1\in D$, 使$x\in A_{\alpha_1}\cap A$,从而$x\in A_{\alpha_1}$且$x\in A$. 故$x\in\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A$, 即$\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)\subset\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A$.

综上所述,等式$\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)\cap A=\bigcup_{\alpha\in D}(A_\alpha\cap A)$得证. □

定理 1.2 设$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$是一族集,则下列运算满足对偶原理:

$$\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c,$$

$$\left(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c=\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha^c \qquad \text{(de Morgan 公式)}.$$

证明 先证第一式．对于任意的 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c$，即 $x\notin\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$，则对于任意的 $\alpha\in D$，皆有 $x\notin A_\alpha$，从而 $x\in A_\alpha^c$．故 $x\in\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c$，即 $\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c\subset\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c$.

另一方面，对于任意的 $x\in\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c$，则对于每一个 $\alpha\in D$ 皆有 $x\in A_\alpha^c$，从而 $x\notin A_\alpha$．故 $x\notin\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha$，即 $x\in\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c$，于是 $\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c\subset\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c$. 因此，第一式得证.

将第一式两边取余集，得到

$$\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\left[\left(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\right)^c\right]^c=\left(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha^c\right)^c.$$

把 A_α 换为 A_α^c，则第二式得证．□

定理 1.3 设 E 是一个集，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是 E 的一族子集，则

(1) $E\setminus\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in D}(E\setminus A_\alpha)$，

(2) $E\setminus\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha=\bigcup_{\alpha\in D}(E\setminus A_\alpha)$.

此定理的证明留给读者自己去完成.

为了今后学习的需要，我们再介绍下面的一些概念.

设 $\mathfrak{M}=\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是 X 中的一族集，$E\subset X$．若 $\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\supset E$，则称 $\mathfrak{M}$ 是 E 的覆盖(covering)．若 $\mathfrak{M}_1=\{A_\alpha\}_{\alpha\in D_1}$ 与 $\mathfrak{M}_2=\{B_\beta\}_{\beta\in D_2}$ 都

是E的覆盖，且$\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}_2$，则称$\mathfrak{M}_1$是$\mathfrak{M}_2$的子覆盖(subcovering)．特别地，当$\mathfrak{M}_2$的子覆盖$\mathfrak{M}_1$是有限集时，我们称$\mathfrak{M}_1$是$\mathfrak{M}_2$的有限子覆盖(finite subcovering)．

设A,B是任意两个集合．对于$a\in A,b\in B$，以(a,b)表示有序元素对，简称序对，并且$(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$定义为$a_1=a_2$且$b_1=b_2$．所有序对组成的集$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$称为$A$与$B$的直积(direct product)，记为$A\times B$，即

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}.$$

当A,B中有一个为空集时，规定$A\times B=\varnothing$．

一般地，设$A_1,A_2,\cdots,A_n(n\geqslant 2)$是$n$个集合，则它们的直积定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$$
$$=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_i\in A_i,\ i=1,2,\cdots,n\},$$

其中每一个$A_i(i=1,2,\cdots,n)$称为此直积的坐标集(coordinate set)．

例如，两个实直线$\mathbb{R}$的直积就是实平面$\mathbb{R}^2$，即$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$．$n$维欧氏空间$\mathbb{R}^n$就是$n$个实直线$\mathbb{R}$的直积．

例3 对于任意的集A,B,C，试证明下式成立：

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C).$$

证明 对于任意的$(a,b)\in A\times(B\cup C)$，则$a\in A,b\in B\cup C$．于是$a\in A,b\in B$或者$b\in C$，故$(a,b)\in(A\times B)\cup(A\times C)$．这表明$A\times(B\cup C)\subset(A\times B)\cup(A\times C)$．同理可证相反的包含关系式．因此等式成立．

习　题

1．证明下列各条是等价的．

(1) $A\cup B=B$，(2) $A\subset B$，(3) $A\cap B=A$．

2. 证明 $x\notin A\cup B$ 的充分必要条件是 $x\notin A$ 且 $x\notin B$.

3. 证明 $(A\backslash B)\backslash C=A\backslash(B\cup C)$.

4. 证明 $(A\cup B)\backslash C=(A\backslash C)\cup(B\backslash C)$,

$(A\cap B)\backslash C=(A\backslash C)\cap(B\backslash C)$.

5. 化简(1) $(A\backslash B)\cup(C\backslash B)$,

(2) $(A\cap B)\cup(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)$.

6. 证明 $A\backslash(A\backslash B)=A\cap B$,

$(A\backslash B)\cap(C\backslash D)=(A\cap C)\backslash(B\cup D)$.

7. 证明 $A\backslash(B\backslash C)\subset(A\backslash B)\cup C$,

$(A\cup C)\backslash(B\cup D)\subset(A\backslash B)\cup(C\backslash D)$.

8. 证明数直线上的开区间$(-2,2)$和闭区间$[-2,2]$可表示为

$$(-2,2)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[-2+\frac{1}{n},2-\frac{1}{n}\right],$$

$$[-2,2]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right).$$

9. 证明定理 1.3.

10. 证明$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$.

§2 映射

在抽象地研究集合时（即对于集合中元素的性质不加考虑时），一个集合中元素的多少应是最基本的概念. 但事物的多或少的概念是通过比较形成的. 如果两个集合的元素都能完全明确地罗列出来，那末容易比较出哪一个集合的元素多，哪一个集合的元素少. 例如，班级教室里的座位都摆整齐了，学生一个人坐一个位置. 如果所有的学生都坐下之后还有座位空着，那末座位比学生多；如果坐满座位后还有学生没有位置坐，那就表示学生多于座位；如果既没有空座位，又没有无位置的学生，那就表示学生与座位数目相等. 这个问题就是利用学生与座位的对应来研究“学生集”与“座位集”中元素的多少. 这样，判断两个有限集 A 和 B 是

否具有同样多的元素并不需要真正知道它们元素的个数，而只需知道能否在它们的元素之间建立起一个一一对应关系即可. 这个事实启示我们如何去研究无限集合中元素的多少. 但是对于无限集合来说,“元素的个数”这个概念是完全没有意义的.

定义 2.1 设 A,B 是两个非空集. 若存在一个对应规律 f，使得对于每一个 $x\in A$,有唯一的 $y\in B$ 与之对应,则称 f 为从 A 到 B 的映射或映象(mapping),记为

$$f:A\to B,$$

或者

$$f:x\mapsto y \quad (x\in A).$$

y 称为 x 在映射 f 下的象(image)，记为 $y=f(x)$或 $y=fx$. 集 A 称为映射 f 的定义域(domain)，记为 $\mathscr{D}(f)$;集$f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$称为映射 f 的值域(range),记为 $\mathscr{R}(f)$.

若 $A_1\subset A$,

$$f(A_1)=\{f(x)\mid x\in A_1\}$$

称为 A_1 在映射 f 下的象;若 $B_1\subset B$,

$$f^{-1}(B_1)=\{x\in A\mid f(x)\in B_1\}$$

称为 B_1 在映射 f 下的逆象或原象 (inverse image). 对于 $y\in B$,单点集$\{y\}$在映射 f 下的逆象记为 $f^{-1}(y)$,即

$$f^{-1}(y)=\{x\in A\mid f(x)=y\}.$$

$f^{-1}(y)$也称为 y 在映射 f 下的逆象. 值得注意，$f^{-1}(y)$是 A 中的集合,可能包含不只一个元素,但其中每一个元素的象都是 y. 还应指出,在这里 $f^{-1}(B_1)$与 $f^{-1}(y)$ 都应分别看作为一个记号.

特别地,对于映射 $f:A\to B$，当 B 为数集时 ($B\subset\mathbb{R}$ 或 $B\subset\mathbb{C}$ 时),称 f 为泛函(functional);当 A 与 B 皆为数集时,f 就是通常所说的函数(function).

定义 2.2 设映射 $f:A\to B$.

(1) 若 $\mathscr{R}(f)=B$，则 f 称为满射(surjection)，或者称为 A 到 B 上(onto)的映射.

(2) 若对于每一个 $y\in\mathscr{R}(f)$，有唯一的 $x\in A$，使得 $f(x)=y$，(等价地，对于 A 中任意的元素 x_1，x_2，若 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$)，则 f 称为单射 (injection)，或一一映射 (one to one mapping).

(3) 若 f 既是满射又是单射，则 f 称为双射(bijection)，或者称为 A 到 B 上的一一映射.

(4) 当 f 是单射时，对于每一个 $y\in\mathscr{R}(f)$，由关系式 $f(x)=y$ 可以确定一个唯一的 $x\in A$ 与之对应，这样得到了一个从 $\mathscr{R}(f)$ 到 A 的映射，记为

$$f^{-1}:\mathscr{R}(f)\to A,$$

称为 f 的逆映射 (inverse mapping). 当 f 是双射时，f 的逆映射为

$$f^{-1}:B\to A.$$

定义 2.3 设映射 $f:A\to B$，映射 $g:B\to C$. 对每一个 $x\in A$，

$$x\mapsto g(f(x))$$

是一个从 A 到 C 的映射，记为 $g\circ f:A\to C$. 我们称 $g\circ f$ 为 f 与 g 的复合映射(composition).

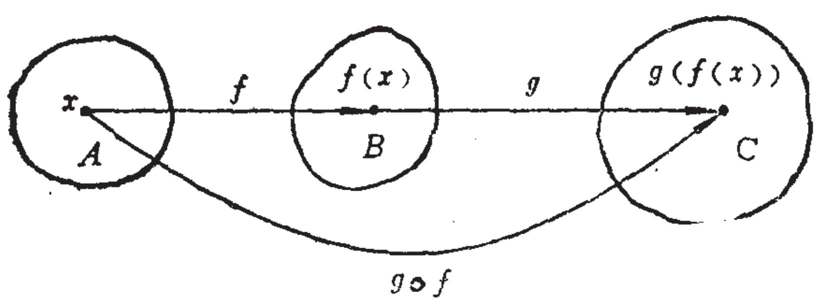


图 2.1 复合映射

定义 2.4 设映射 $f:A\to C$，映射 $g:B\to C$，$B\subset A$. 若对于每一个 $x\in B$ 皆有 $f(x)=g(x)$，则称映射 g 为映射 f 在 B 上的限制

(restriction)，记为 $g=f|_B$. 此时，也称 f 为 g 在 A 上的扩张或延拓(extension).

例 1 设映射 $f:A\to B$，$y_0\in B$. 若对于每一个 $x\in A$ 皆有

$$f(x)=y_0,$$

则 f 称为常值映射(constant mapping). 这时 $\mathscr{R}(f)=\{y_0\}$.

例 2 设 A 为非空集合. 若对于每一个 $x\in A$，定义映射 I 为

$$I(x)=x,$$

则 $I:A\to A$ 称为 A 上的恒等映射(identity mapping). 显然，恒等映射是双射.

例 3 对于 $x\in C[0,1]$，定义

$$f:x\mapsto\int_0^1 x(t)\mathrm{d}t.$$

则 $f:C[0,1]\to\mathbf{R}$ 是一个满射.

由上面的定义，不难推出下列各条性质(证明留给读者).

定理 2.5 设映射 $f:X\to Y$，映射 $g:Y\to Z$.

(1) 对于任意的 $A\subset X$，$B\subset Y$，

$$A\subset f^{-1}(f(A)),$$

$$f(f^{-1}(B))\subset B,$$

$$f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c;$$

当 f 是满射时，$f(f^{-1}(B))=B$.

当 f 是单射时，$f^{-1}(f(A))=A$.

(2) 对于任意的 X 中的集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 及 Y 中的集族 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in D}$，

$$f\Big(\bigcup_{\alpha\in D}A_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in D}f(A_\alpha),$$

$$f\Big(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\Big)\subset\bigcap_{\alpha\in D}f(A_\alpha),$$

$$f^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha\in D}B_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in D}f^{-1}(B_\alpha),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in D}B_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in D}f^{-1}(B_\alpha).$$

当 f 是单射时，$f\left(\bigcap_{\alpha\in D}A_\alpha\right)=\bigcap_{\alpha\in D}f(A_\alpha)$.

(3) 若 f 是双射，则 f^{-1}: $Y\to X$ 是双射，且 $f^{-1}\circ f$ 与 $f\circ f^{-1}$ 分别是 X 与 Y 上的恒等映射.

(4) 若 f,g 都是满射，则 $g\circ f$ 也是满射.

若 f,g 都是单射，则 $g\circ f$ 也是单射.

若 f,g 都是双射，则 $g\circ f$ 也是双射.

习　题

1. 设 $f:X\to Y, A\subset X, B\subset Y$. 证明

(1) $A\subset f^{-1}(f(A))$,

(2) $f(f^{-1}(B))\subset B$,

(3) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$.

举例说明在(1)与(2)中的包含关系不能改为相等.

2. 设 $f:X\to Y, A,B\subset X$. 证明

$$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B).$$

举例说明在上式中的包含关系不能改为相等.

3. 设映射 $f:(0,1)\to(0,+\infty)$ 定义为

$$f(x)=\frac{x}{1-x}\quad (x\in(0,1)).$$

证明 f 是双射.

4. 设 $C^1[0,1]$ 为闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数的函数的全体，映射 D: $C^1[0,1]\to C[0,1]$ 定义为

$$(Df)(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\quad (f\in C^1[0,1]).$$

证明 D 是满射但不是单射.

§3 集的对等·可数集

定义 3.1 设 A, B 是两个集合. 若存在一个双射 f: $A\to B$, 则称 A 与 B 是对等的或等势的(equipotent), 记为 $A\sim B$.

规定空集与自身对等.

值得注意, $A\sim B$ 与 $A=B$ 具有不同的含义, 即对等的两个集合不必是相等的. 对于有限集 A, B 而言, $A\sim B$ 等价于它们的元素的个数相同.

关于集的对等关系, 由定义容易得到如下性质.

引理 3.2 设 A, B, C 是任意的集, 则

(1) $A\sim A$(自反性),

(2) 若 $A\sim B$, 则 $B\sim A$(对称性),

(3) 若 $A\sim B$ 且 $B\sim C$, 则 $A\sim C$(传递性).

引理 3.3 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 和 $\{B_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 是两个非空集族, 且对于 α, $\beta\in D$ 当 $\alpha\neq\beta$ 时, $A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$, $B_\alpha\cap B_\beta=\varnothing$. 若对于每一个 $x\in D$ 有 $A_\alpha\sim B_\alpha$, 则

$$\bigcup_{\alpha\in D} A_\alpha\sim\bigcup_{\alpha\in D} B_\alpha.$$

例 1 设 $\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$, $B=\{-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$. 对每一个 $n\in\mathbf{N}$, 令 $f(n)=-n$, 则 f 是 $\mathbf{N}$ 到 B 的双射, 故 $\mathbf{N}\sim B$.

例 2 集 $A=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$, $B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 与 $\mathbf{N}$ 是彼此对等的.

例 3 设 $A=(0,1)$, $B=(0,+\infty)$, 则 $A\sim B$.

证明 在 xoy 平面上取点 $p(0,1)$. 以 p 为圆心, 1 为半径作圆弧 C(如图 3.1). 对于 $x\in A$, 作垂直于 ox 轴的垂线交 C 于 z, 过 z 的射线 pz 交 ox 轴于 y, 则映射

$$f:\ x\mapsto y$$

是 A 到 B 的双射. 因此 $A\sim B$.

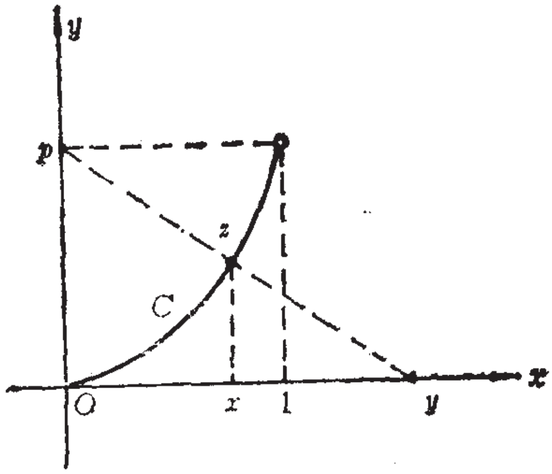


图 3.1

定义 3.4 凡与自然数集N对等的集称为可数集或可列集(countable set). 不是可数集的无限集称为不可数集(uncountable set). 有限集和可数集统称为至多可数集.

奇数的全体组成的集,偶数的全体组成的集,整数的全体组成的集**Z**都是可数集.

若集A可数,则$A\sim \mathrm{N}$,即存在双射f: $\mathrm{N}\to A$,使得对于每一个$n\in\mathrm{N}$对应一个,且只对应一个A中的一个元素,可记为a_n. 这表明A中的所有元素可以用自然数编号,即A可排成无穷序列的形式:

(3.1) $$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

反之,若一个集合A可以排成无穷序列(3.1)的形式,则

$$f:\ n\mapsto a_n$$

是N到A的双射,故$\mathrm{N}\sim A$,从而A为可数集. 因此,A为可数集的充分必要条件是A可以排成无穷序列(3.1)的形式.

定理 3.5 可数集的子集至多是可数集.

证明 设A是可数集,则$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 若$B$是$A$的子集,且$B$不是有限集,则$B$显然是无穷序列$\{a_n\}$的子序列,即

$$B=\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots a_{n_k},\cdots\}.$$

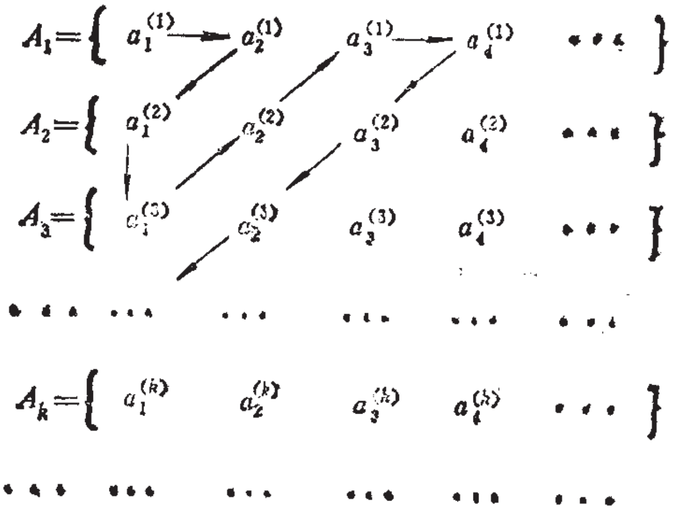
可见，B 也可以排成无穷序列的形式．因此 B 是可数集．　□

定理 3.6　任何无限集必含有可数子集．

证明　设 A 为无限集．取 $a_1\in A$．由于 A 为无限集，于是 $A\setminus\{a_1\}$ 非空，从而可取 $a_2\in A\setminus\{a_1\}$．如此继续下去，可得到 A 的一个可数子集 $\{a_1, a_2, \cdots\}$．　□

定理 3.7　可数个可数集的并是可数集．

证明　设 $\{A_k\}_{k\in N}$ 是一列可数集．不妨设



我们按上面箭头指向的顺序排列得到

$$\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, \cdots\},$$

从中删去重复的元素．这样，$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 的元素可以排成一个无穷序列，故它是可数集．　□

定理 3.8　区间 $[0,1]$ 是不可数集．

证明　采用反证法．假若 $[0,1]$ 是可数集，则它的元素可以排成一个无穷序列的形式，即

$$[0,1]=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} \tag{3.2}$$

记 $I_0=[0, 1]$．在 I_0 内作一个闭区间 I_1，使得它的长 $|I_1|<\frac{1}{2}$ 且

$a_1 \notin I_1$. 再在 I_1内作一个闭区间 I_2，使得$|I_2|<\frac{1}{2^2}$且 $a_2 \notin I_2$. 如此继续下去，则可得到一列闭区间 $I_0, I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$，满足下面的条件:

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots,$$

$$|I_i|<\frac{1}{2^i}(i=1,2,\cdots),$$

$$a_i \notin I_i (i=1,2,\cdots). \tag{3.3}$$

因$\frac{1}{2^i} \to 0(i \to \infty)$，故由《数学分析》中的闭区间套定理，存在唯一的 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} I_i$. 由于 $x_0 \in I_0$及I_0具有(3.2)的形式，必存在 $n \in \mathrm{N}$使得 $x_0=a_n$. 于是 $a_n=x_0 \in I_n$，此与(3.3)矛盾. 这就证明了[0,1]是不可数的. □

例 4 有理数的全体所组成的集合Q是可数的.

证明 设Q^+,Q^-分别表示正,负有理数的全体,则

$$\mathrm{Q}=\mathrm{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathrm{Q}^-. \tag{3.4}$$

我们证明Q^+是可数的. 事实上，每一个正有理数都可以表示为$\frac{p}{q}$的形式,其中 $p, q \in \mathrm{N}$. 对于每一个 $q \in \mathrm{N}$,令

$$A_q=\left\{\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \cdots\right\},$$

显然A_q是可数集,并且$\mathrm{Q}^+=\bigcup_{q=1}^{\infty} A_q$. 由定理 3.7 知,$\mathrm{Q}^+$是可数集. 易知$\mathrm{Q}^+ \sim \mathrm{Q}^-$,故$\mathrm{Q}^-$也是可数的. 由(3.4)，再用定理3.7,则Q是可数的.

例 5 直线上互不相交的开区间所组成的集至多是可数集.

证明 设$\mathfrak{M}$ 为直线上互不相交的开区间所组成的集. 由有理

数的稠密性，对每一个开区间$(a,b)\in\mathfrak{M}$，可选取一个有理点$r_{ab}\in(a,b)$，故由$(a,b)\mapsto r_{ab}$所确定的映射是$\mathfrak{M}$到$\mathbb{Q}$的某一个子集的双射．而$\mathbb{Q}$是可数的，由定理 3.5 知，$\mathbb{Q}$的子集至多是可数的．因此$\mathfrak{M}$至多是可数的．

习　题

1. 证明下列各对集合是对等的．

(1) $[0,1]$与$(0,1)$，

(2) (a,b)与$(0,1)$，

(3) $(-\infty,+\infty)$与$(-1,1)$．

2. 证明$[0,1]$上的全体无理数组成的集合是不可数的．

3. 证明n维欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的有理点的全体组成一个可数集．

4. 证明所有系数为有理数的多项式的全体组成一个可数集．

5. 证明在平面直角坐标系下格点（指两坐标均为整数的点）的全体组成一个可数集．

6. 证明所有以有理数a和b为端点的开区间(a,b)的全体组成一个可数集．

7. 证明单调函数的不连续点的全体至多成为一个可数集．

§4　集的基数

现在，我们用对等关系将所有的集合分类，即一切与集A对等的集归于一类，称为包含集A的等价类(equivalence class)，记为$R(A)$，它是一个以集合为元素的集类（或称为集族），即

$$R(A)=\{B\mid B\text{ 是集合},B\sim A\}.$$

容易看出：$A\in R(A)$；若$B,C\in R(A)$，则$B\sim C$；$A\sim B$当且仅当$R(A)=R(B)$；A与B不对等当且仅当$R(A)\cap R(B)=\varnothing$．因此，对于任意的集$A$和$B$，在等式$R(A)=R(B)$与$R(A)\cap R(B)=\varnothing$中仅有一个成立．这样，我们采用的分类法把彼此对等的集合归为同

一集类(等价类)，不对等的集合属于不同的集类．对于同一集类中的一切集，我们称它们具有相同的基数(cardinal number)，或称它们具有相同的势(power)，记号$\overline{\overline{A}}$表示集A的基数．由此可知，当$A\sim B$时有$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$．

若A为具有n个元素的有限集，那末包含在A的等价类中的任何集合都有共同的特征：皆含有n个元素．因此记$\overline{\overline{A}}=n$．在一般的情况下，集$A$的基数可以看作为"元素个数"的概念的推广．

自然数的全体$\mathbf{N}$的基数记为$\aleph_0$．(读作Aleph零)，即$\overline{\overline{\mathbf{N}}}=\aleph_0$．因此任何可数的无限集的基数都是$\aleph_0$．

区间$[0,1]$的基数记为$\aleph$，即$\overline{\overline{[0,1]}}=\aleph$．

规定空集$\varnothing$的基数$\overline{\overline{\varnothing}}=0$．

设$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{M}$，$\overline{\overline{B}}=\mathfrak{N}$．若$A$与$B$的一个子集对等，则规定$\mathfrak{M}\leqslant\mathfrak{N}$．若$\mathfrak{M}\leqslant\mathfrak{N}$且$\mathfrak{M}\neq\mathfrak{N}$，即$A$与$B$的一个子集对等但$A$与$B$不对等，则规定$\mathfrak{M}<\mathfrak{N}$．按此规定，我们有

$$0<n<\aleph_0<\aleph,$$

其中n为自然数．

设A是一个集，$\mathscr{P}(A)$表示A的所有子集组成的集，即

$$\mathscr{P}(A)=\{B\mid B\subset A\}.$$

若A是含有n个元素的有限集，则$\mathscr{P}(A)$含有2^n个元素．推广到一般的情况，若$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{M}$，我们记$\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}=2^{\mathfrak{M}}$，则有下面的结论．

定理 4.1 设A是一个集，$\overline{\overline{A}}=\mathfrak{M}$，则$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$，即$\mathfrak{M}<2^{\mathfrak{M}}$．

证明 若$A=\varnothing$，则$\overline{\overline{A}}=0<1=\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$．

现设$A\neq\varnothing$．定义f：$A\to\mathscr{P}(A)$，使得对每一个$x\in A$

$$f(x)=\{\ x\ \},$$

则f是单射，从而$\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$．现在证明它们的基数不相等．假若$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$，则存在双射$g$：$A\to\mathscr{P}(A)$．令

$$B=\{x\in A\mid x\notin g(x)\},$$

则 $B\in\mathscr{P}(A)$. 于是存在 $a\in A$ 使得 $g(a)=B$. 有下列两种情况:

(1) 若 $a\in B$, 则由 B 的元素的定义 $a\notin g(a)$. 但由 $g(a)=B$ 知, $a\notin B$. 矛盾.

(2) 若 $a\notin B$, 则 $a\in g(a)$. 由 B 的元素的定义, $a\in B$. 矛盾. 故 $\overline{\overline{A}}\neq\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$. 因此 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{\mathscr{P}(A)}}$. □

定理 4.1 表明, 在集合的基数中不存在最大的基数.

关于基数的比较, 有下面一个重要的定理.

定理 4.2(Bernstein) 设 A, B 是两个集. 若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$ 且 $\overline{\overline{A}}\geqslant\overline{\overline{B}}$, 则 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$.

证明 由于 $\overline{\overline{A}}\leqslant\overline{\overline{B}}$, 则存在 $B_0\subset B$ 以及存在双射 f: $A\to B_0$. 同样, 由于 $\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{A}}$, 则存在 $A_0\subset A$ 以及存在双射 g: $B\to A_0$. 令

$$
\begin{aligned}
&A\setminus A_0=A_1, f(A_1)=B_1,\\
&g(B_1)=A_2, f(A_2)=B_2,\\
&g(B_2)=A_3, f(A_3)=B_3,\\
&g(B_3)=A_4, f(A_4)=B_4,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots,
\end{aligned}
$$

由 $A_0\cap A_1=\varnothing$ 及 $A_{n+1}=g(B_n)\subset A_0$, 得到 $A_1\cap A_{n+1}=\varnothing\,(n\in\mathbf{N})$. 因 f 是双射, 故 $B_1\cap B_2=f(A_1)\cap f(A_2)=\varnothing$. 因 g 是双射, 故 $A_2\cap A_3=g(B_1)\cap g(B_2)=\varnothing$. 于是 A_1, A_2, A_3 互不相交. 由此又可推出 B_1, B_2, B_3 互不相交. 如此继续推证下去, 可得到: $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 是一列互不相交的集; $B_1, B_2, B_3, \cdots$ 是一列互不相交的集. 又因 f 是双射, 有 $A_n\sim B_n\,(n\in\mathrm{N})$, 故 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$. 又因 g 是双射, 有 $B\sim A_0$, $B_n\sim A_{n+1}\,(n\in\mathrm{N})$, 故

$$B\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\sim A_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{n+1}=A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

因此

$$A=\left(A\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\sim\left(B\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)\cup\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=B.\ \square$$

注 应用Bernstein定理可以导出如下结论：对于任意的两个基数$\mathfrak{M}$和$\mathfrak{N}$，三个关系式

$$\mathfrak{M}<\mathfrak{N},\ \mathfrak{M}=\mathfrak{N},\ \mathfrak{N}<\mathfrak{M}$$

中不可能有两个关系式同时成立．事实上，当$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$时，其它两个关系式显然不能成立．假若$\mathfrak{M}<\mathfrak{N}$与$\mathfrak{N}<\mathfrak{M}$同时成立，则有(i) $\mathfrak{M}\neq\mathfrak{N}$，(ii)$\mathfrak{M}\leqslant\mathfrak{N}$，(iii)$\mathfrak{N}\leqslant\mathfrak{M}$．由(ii)与(iii)成立，应用Bernstein定理则得$\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$．此与(i)矛盾．

例 1 开区间(0, 1)的基数$\overline{\overline{(0,\ 1)}}=\aleph$．

证明 只需证$(0,1)\sim[0,1]$．

记(0,1)中的有理数的全体为$A=\{r_1,r_2,\cdots\}$，则$(0,\ 1)\setminus A$便是(0,1)中的无理数的全体．定义f：$(0,\ 1)\to[0,\ 1]$使得对于每一个$x\in(0,1)$

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若\ x\in(0,1)\setminus A,\\ 0, & 若\ x=r_1,\\ 1, & 若\ x=r_2,\\ r_n, & 若\ x=r_{n+2}(n\in\mathbf{N})\end{cases}$$

则f是双射．因此$(0,1)\sim[0,1]$，从而$\overline{\overline{(0,\ 1)}}=\overline{\overline{[0,\ 1]}}=\aleph$．

例 2 数直线$\mathbf{R}$是不可数的，且$\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\aleph$．

证明 定义f：$(0,1)\to\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，使得对每一个$x\in(0,1)$

$$f(x)=\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right),$$

则f是双射．因此$\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\overline{\overline{(0,\ 1)}}=\aleph$．

例 3 开区间(0, 1)上任意一点x可以表示为十进位小数的形式

$$(4.1)\qquad x=0.x_1x_2x_3\cdots\quad(x_i\in\{0,1,2,\cdots,9\},\ i\in\mathbf{N}).$$

如果x是$(0,1)$上的十进位分点(即十分位，百分位，千分位，…的分点)，那末x可表示为有限小数的形式或以9为循环的无限循环小数的形式. 例如有限小数0.27还可以表示为以9为循环的小数0.26999…. 然而

$$0.27=0.26999\cdots.$$

换句话说，上面这两种形式的十进位小数对应于$(0,1)$上的同一数(或同一点). 我们称0.27为此数的零循环表示；称0.26999…为此数的9循环表示. 如果x不是$(0,1)$上的十进位分点，那末x可表示为一个唯一十进位小数. 令所有形如(4.1)的十进位小数组成的集为A，即

$$A=\{0.x_1x_2x_3\cdots\mid x_i\in\{0,1,2,\cdots,9\},i\in\mathbf{N}\}.$$

令A中所有以9为循环的无限循环小数组成的集为A_1. 容易看出：(1)开区间$(0,1)$上的十进位分点的全体所组成的集

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{k}{10^n}\,\middle|\,k\in\{1,2,\cdots,10^n-1\}\right\}$$

是可数集. 而A_1与E对等，故A_1是可数集. (2)$A\backslash A_1$与开区间$(0,1)$对等，故$A\backslash A_1$的基数为$\aleph$. 由此可以证明(留作习题，见习题2)，$A=(A\backslash A_1)\cup A_1$的基数是$\aleph$.

类似于上面的讨论，开区间$(0,1)$上任意一点x可以表示为二进位小数的形式

$$x=0.x_1x_2x_3\cdots\quad(x_i=0\text{ 或 }1,i\in\mathbf{N}).$$

如果x是$(0,1)$上的二进位分点，那末x可以表示为有限小数的形式或以1为循环的无限小数的形式. 例如有限小数0.11还可以表示为以1为循环的小数0.10111…. 然而

$$0.11=0.10111\cdots.$$

这表明二进位小数 0.11 与 0.10111…对应于(0, 1)上的同一数，它们分别称为此数的零循环表示和 1 循环表示. 令

$$B=\{0.x_1x_2x_3\cdots \mid x_i=0 \text{ 或 } 1, i\in\mathrm{N}\},$$

则同样有$\overline{\overline{B}}=\aleph$.

例 4 所有实数列组成的集 E^∞的基数为$\aleph$.

证明 定义映射 f: $\mathrm{R}\to E^\infty$使得对每一个$x\in\mathrm{R}$

$$f(x)=(x,x,x,\cdots)\in E^\infty,$$

则 f 是单射，即R与E^∞的一个子集对等，故$\aleph=\overline{\overline{\mathrm{R}}}\leqslant\overline{\overline{E^\infty}}$.

由 Benstein 定理，我们只需要证明$\overline{\overline{E^\infty}}\geqslant\aleph$. 令

$$B=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\mid 0<x_n<1, n\in\mathrm{N}\}.$$

定义映射 g: $B\to E^\infty$使得对每一个 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B$,

$$g(x)=\left(\operatorname{tg}\left(x_1-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \operatorname{tg}\left(x_2-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots,\ \operatorname{tg}\left(x_n-\frac{1}{2}\right)\pi,\ \cdots\right),$$

则 g 是双射，即$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{E^\infty}}$. 对于 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in B$，每一个 x_n 可表示为十进位无限小数的形式

$$\begin{aligned}
x_1&=0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots x_{1n}\cdots,\\
x_2&=0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots x_{2n}\cdots,\\
x_3&=0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots x_{3n}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ ,\\
x_n&=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\cdots x_{nn}\cdots,\\
&\cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ .
\end{aligned}$$

我们定义映射 h: $B\to(0,1)$使得

$$h(x)=0.x_{11}x_{12}x_{21}x_{31}x_{22}x_{13}x_{14}x_{23}\cdots.$$

则易见 h 是单射，即 B 与 (0, 1)的一个子集对等，故$\overline{\overline{E^\infty}}=\overline{\overline{B}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph$. 综合上面的证明则得$\overline{\overline{E^\infty}}=\aleph$.

习 题

1. 证明区间 (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(0,+\infty)$, $[0,+\infty)$ 的基数均为 $\aleph$.

2. 证明：若 $\overline{\overline{A}}=\aleph$, B 是有限或可数集，则 $\overline{\overline{A\cup B}}=\aleph$.

3. 设 $\{A_\alpha \mid \alpha\in D\}$ 是一集族，其中每一个 A_α 的基数为 $\aleph$. 问当指标集 D 分别是有限集，可数集和基数为 $\aleph$ 的集时，$\bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha$ 的基数如何？

4. 证明 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的基数是 $\aleph$.

5. 设 B 为所有二进位小数组成的集，即

$$B=\{0.x_1x_2x_3\cdots \mid x_i=0 \text{ 或 } 1,\ i\in\mathbf{N}\}.$$

证明 $\overline{\overline{E}}=\aleph$.

6. 设 $E=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)\mid a_n=0 \text{ 或 } 1,\ n\in\mathbf{N}\}$. 证明 $\overline{\overline{E}}=\aleph$.

7. 设 A 为可数集，$\mathscr{U}$ 表示所有 A 的有限子集组成的集族. 证明 $\mathscr{U}$ 是可数的.

8. 设 $C[0,1]$ 是 $[0,1]$ 上所有连续函数组成的集. 试证明它的基数为 $\aleph$.

*§5 偏序集·选择公理

在集合的元素之间的序的概念是近代数学中的一个很基本的概念. 带有这种序的集合，作为一种基本的数学结构，在近代数学的各个方面都经常需要用到它. 在本节中，我们着重介绍有关序的一些基本概念.

定义 5.1 设 E 是一个集. 若在 E 的元素之间规定一种关系"$\leqslant$"，满足下列条件：

(1)（自反性） 对每一个 $a\in E$ 皆有 $a\leqslant a$；

(2)（反对称性）若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant a\ (a,b\in E)$，则 $a=b$；

(3)（传递性） 若 $a\leqslant b$ 且 $b\leqslant c\ (a,b,c\in E)$，则 $a\leqslant c$.

则我们称此关系"$\leqslant$"为 E 上的一个偏序 (partial ordering)，这时称 $(E,\leqslant)$ 为一个偏序集 (partially ordered set)，或简单地称 E

为一个偏序集．“$a \leqslant b$”读作“a 前于 b”(或“b 后于 a”)．

下面举出一些常见到的偏序集的例子，请读者自己验证它们满足定义 5.1 中的条件．

例 1 $(\mathbb{R}, \leqslant)$是偏序集．其中“$\leqslant$”为二实数之间的小于或等于关系．

例 2 设$x=(\xi_1, \xi_2)$和$y=(\eta_1, \eta_2)$是$\mathbb{R}^2$中的任意二元素．若定义“$\leqslant$”使得

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \xi_1 \leqslant \eta_1 \text{ 且 } \xi_2 \leqslant \eta_2$$

(上面等价符号右端的记号“$\leqslant$”是实数中的“小于或等于”)，则$(\mathbb{R}^2, \leqslant)$是偏序集．

例 3 设 $x=(\xi_1, \xi_2)$和 $y=(\eta_1, \eta_2)$是$\mathbb{R}^2$中的任意二元素．若定义“$<$”使得

$$x < y \Leftrightarrow \xi_1 < \eta_1 \text{ 或者当 } \xi_1 = \eta_1 \text{ 时必有 } \xi_2 \leqslant \eta_2$$

(上面等价符号右端的记号“$<$”和“$\leqslant$”分别是实数中的“小于”和“小于或等于”)，则$(\mathbb{R}^2, <)$是偏序集，我们称它为字典序平面(lexicographically ordered plane)．

例 4 设$\mathscr{P}(x)$是集 $x(\neq\varnothing)$的所有子集组成的集族，“$\subset$”是集合之间的包含关系．则$(\mathscr{P}(x), \subset)$是偏序集．

例 5 设$C[a,b]$是$[a, b]$上所有实值连续函数的全体，定义“$\leqslant$”使得对于任意的 $f, g \in C[a,b]$，

$$f \leqslant g \Leftrightarrow \text{对每一个 } x \in [a,b] \text{ 都有 } f(x) \leqslant g(x)$$

(上面等价符号右端的记号“$\leqslant$”是实数中的“小于或等于”)，则$(C[a,b], \leqslant)$是偏序集．

设$(E, \leqslant)$是一个偏序集．若E中任意二元素a与b都是可比较的，即必有 $a \leqslant b$ 或者 $b \leqslant a$ 成立，则$(E, \leqslant)$称为一个全序集(totally ordered set)，或称为一个线性序集 (linearly ordered set)．例如，例 1 中的数直线$\mathbb{R}$和例 3 中的字典序平面都是全序

集. 然而在一般的偏序集E中,可能有这样两个元素a与b,它们是不可比较的,即a与b之间没有序关系, 既不成立$a\leqslant b$又不成立$b\leqslant a$. 容易看出,例2,例4和例5中的偏序集都不是全序集.

设E是一个偏序集, $A\subset E$. 按照E的偏序, A也是一个偏序集,我们称A为E的偏序子集(partially ordered subset).

定义 5.2 设$(E,\leqslant)$是一个偏序集,$x\in E$, $A\subset E$.

(1) 若对每一个$a\in A$都有$a\leqslant x$, 则x称为A的上界(upper bound). 若对每一个$a\in A$都有$x\leqslant a$, 则x称为A的下界(lower bound).

(2) 若x是A的上界且对于A的任意一个上界y都有$x\leqslant y$, 则x称为A的最小上界(least upper bound), 或称为A的上确界(supremum),记为$x=\sup A$. 若x是A的下界且对于A的任意一个下界y都有$y\leqslant x$, 则x称为A的最大下界(greatest lower bound),或称为A的下确界(infimum),记为$x=\inf A$.

(3) 若$x\in A$且A中除x之外不存在后于x的元素 (或者说若存在$a\in A$使得$x\leqslant a$则必有$x=a$),则x称为A的极大元(maximal element). 若$x\in A$且A中除x之外不存在前于x的元素(或者说, 若存在$a\in A$使得$a\leqslant x$则必有$x=a$), 则x称为A的极小元(minimal element).

需要指出,偏序集E的子集A的上界(或下界)可能存在,也可能不存在, 若存在也可能不唯一. A的上确界(或下确界)可能存在,也可能不存在. 例如在例1中取$A=(0,+\infty)$, A的上界和上确界都不存在. 同样,偏序集的极大元(或极小元)可能存在,也可能不存在,若存在也可能不唯一.

在本节的第二部分, 我们介绍集论中一个重要的公理—选择公理以及与它等价的Zorn引理. 它们在现代数学的发展中起了重要的作用.

对于有限个非空的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，它们的直积为

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

其元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可认为依次从每一个集 A_i 中选取一点 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 而得到，记 $D = \{1, 2, \cdots, n\}$. 那末上述直积的元素 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可以等同为这样一个映射 a: $D \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 使得

$$a(i) = a_i \in A_i (i = 1, 2, \cdots, n).$$

因此 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 可定义为上述映射 a 的全体组成的集.

现在我们把这一问题推广到考虑任意指标集 D 的集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in D}$ 的直积，记为 $\bigtimes_{\alpha \in D} A_\alpha$. 我们有理由设想能够从每一个集 A_α 中选取一点 $a_\alpha (\alpha \in D)$ 来组成直积 $\bigtimes_{\alpha \in D} A_\alpha$ 中的元素 $(a_\alpha)_{\alpha \in D}$. 此元素可以等同为这样一个映射 a: $D \to \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha$ 使得

$$a(\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha (\alpha \in D).$$

我们称此映射 a 为选择函数(choice function). 这样我们可以定义

$$\bigtimes_{\alpha \in D} A_\alpha = \{a \mid a: D \to \bigcup_{\alpha \in D} A_\alpha \text{使 } a(\alpha) = a_\alpha \in A_\alpha (\alpha \in D)\}.$$

我们的上述设想的合理性，或者说存在选择函数的合理性，或者说直积 $\bigtimes_{\alpha \in D} A_\alpha \neq \varnothing$ 的合理性，这就是如下的选择公理.

公理 5.3（选择公理） 若 $D \neq \varnothing$ 且对每一个 $\alpha \in D$ 都有 $A_\alpha \neq \varnothing$，则 $\bigtimes_{\alpha \in D} A_\alpha \neq \varnothing$.

选择公理是由 Zermelo 于本世纪初提出来的. 历史上曾有一些数学家怀疑这条公理的合理性，经过半个多世纪数理逻辑学家

们的努力，终于证实了其合理性. P·J·Cohen 在他的书(“*Set Theory and the Continuum Hypothesis*”W·A·Benjamin Inc. 1966)中指出，选择公理独立于其他的集论公理. 这就是说，它既不能从通常的集论公理系统中推导出来，也不会与通常的集论公理系统相矛盾. 因此，在数学各分支中可以放心地使用它.

选择公理有多种等价形式. 下面介绍的 Zorn 引理就是其中一种应用较为广泛的等价形式. 由于它们互相的等价性，我们可以把 Zorn 引理当作为公理.

公理 5.4 (Zorn 引理) 设E是一个非空的偏序集. 若E的每一个全序子集都有上界，则E有极大元.

第二章　度量空间

§1　度量空间的基本概念

在数直线 R 上，任意两点 x 与 y 的距离可以用绝对值 $|x-y|$ 表示，或者说，任意一个点对 (x,y) 对应于一个非负的实数 $|x-y|$，这样确定了一个 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的映射 d，

$$d:(x,y)\mapsto d(x,y)=|x-y|.$$

在平面上和三维欧氏空间中也有类似的两点距离的概念，例如 R 中任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 与 $y=(\eta_1,\eta_2)$ 的距离

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}.$$

现在，从上述我们熟悉的两点距离的性质中，抽出最基本的几条作为度量公理，得出度量空间的定义.

定义 1.1　设 X 是一个非空集合，d 是一个定义在 $X\times X$ 上的实值函数，即对 X 中任意的两个元素 x,y，对应于一个实数 $d(x,y)$. 若对于任意的 $x,y,z\in X$，满足

(M1)　$d(x,y)\geqslant 0$，$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

(M2)　$d(x,y)=d(y,x)$　(对称性)；

(M3)　$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$　(三角不等式)，

则 d 称为 X 上的度量(metric) 或称为距离函数 (distance function)，(X,d) 称为度量空间(metric space). 度量空间 (X,d) 可简记为 X. 对于给定的 $x,y\in X$，$d(x,y)$ 称为 x 与 y 的距离.

定义中，三角不等式在 $\mathbf{R}^2$ 中的几何意义是明显的，在几何上，它表示在任何一个三角形中两边之和大于第三边这样一个事实. 由数学归纳法，三角不等式有更一般的形式:

$$d(x_1,x_n)\leqslant d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3)+\cdots+d(x_{n-1},x_n).$$

由三角不等式，还可以推出下面两个常用的性质.

引理1.2 在度量空间(X,d)中，

(1) 对任意的$x,y,z\in X$，有

$$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y);$$

(2) 对任意的$x,y,x',y'\in X$，有

$$|d(x,y)-d(x',y')|\leqslant d(x,x')+d(y,y').$$

证明 (1) 由三角不等式$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)$，则

$$d(x,z)-d(y,z)\leqslant d(x,y). \tag{1.1}$$

又由$d(y,z)\leqslant d(y,x)+d(x,z)$，则

$$d(y,z)-d(x,z)\leqslant d(x,y). \tag{1.2}$$

综合(1.1)和(1.2)，得到$|d(x,z)-d(y,z)|\leqslant d(x,y)$.

(2) 证明类似于(1). 留作习题. □

在定义1.1中，若将条件$(M1)$削弱，我们有下面的定义.

定义1.3 设X是一个非空集合，d是一个定义在$X\times X$上的实值函数. 若对于任意的$x,y,z\in X$，满足

$(M1')$ $d(x,y)\geqslant 0$ 且 $d(x,x)=0$;

$(M2)$ $d(x,y)=d(y,x)$;

$(M3)$ $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$,

则d称为X上的半度量(semimetric)，或称为拟度量或伪度量(pseudometric). 这时(X,d)称为半度量空间，或称为拟度量空间或伪度量空间.

下面，我们给出一些度量空间的例子.

例1 在实平面$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$上，对于任意$x=(\xi_1,\xi_2)$，$y=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbf{R}^2$，定义

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|,$$

则$(\mathbf{R}^2,d_1)$是度量空间. 事实上，只需验证三角不等式. 再设

$z=(\zeta_1,\zeta_2)\in\mathbb{R}^2$，则

$$\begin{aligned}d_1(x,y)&=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|\\&\leqslant|\xi_1-\zeta_1|+|\zeta_1-\eta_1|+|\xi_2-\zeta_2|+|\zeta_2-\eta_2|\\&=d_1(x,z)+d_1(z,y).\end{aligned}$$

例 2 设 X 是一个非空集合．$X\times X$ 上的实值函数 d 定义为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & 若\ x=y,\\1, & 若\ x\neq y.\end{cases}$$

容易验证 d 是 X 上的度量．我们称 d 是 X 上的**离散度量**(discrete metric)．(X,d) 称为离散的度量空间．

例 3 设 X 是一个非空集合，对于任意的 $x,y\in X$，定义

$$d(x,y)=0,$$

则 (X,d) 是一个半度量空间，称为**紧连的半度量空间**(indiscrete semimetric space)．

例 4 $C[a,b]$ 空间．$C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数的全体组成的集合．对于任意的 $x,y\in C[a,b]$，定义

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|,$$

则 d 是 $C[a,b]$ 上的度量．事实上，只需验证三角不等式．由于

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)|&\leqslant|x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\&\leqslant\max_{t\in[a,b]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[a,b]}|z(t)-y(t)|\\&=d(x,z)+d(z,y),\end{aligned}$$

则 $d(x,y)=\max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

例 5 l^∞ 空间．l^∞ 是有界实数(或复数)列的全体组成的集合，即 l^∞ 中的每一个元素 x 可以记为 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，并且存在一个仅与 x 有关的常数 c_x，使得对每一个 $i\in\mathbf{N}$，

$$|\xi_i|\leqslant c_x.$$

对于 l^∞ 中的任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，定义

$$d(x,y)=\sup_{i\in N}|\xi_i-\eta_i|.$$

容易验证，(l^∞,d)是一个度量空间(留作习题).

例6 设s是所有(有界的或无界的)实数(或复数)列的全体组成的集合. 对s中任意的两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，定义

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\ \frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

则d是s上的度量. 事实上，$(M1)$和$(M2)$是显然满足的. 为验证满足$(M3)$，我们考察实函数$f(t)=\dfrac{t}{1+t}$. 由于$f'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2}$在$t>-1$时恒大于零，因此$f(t)$在$t>-1$时是单调增加的. 这样，对任意的数a和b，因$|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

再设$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)\in s$，在上面的不等式中令$a=\xi_i-\zeta_i$，$b=\xi_i-\eta_i$，则

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left(\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}\right)\\&=d(x,z)+d(y,z).\end{aligned}$$

例7 l^p空间$(1\leqslant p<\infty)$. l^p是所有满足

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$$

的实(或复)数列$(\xi_1,\xi_2,\cdots)$的全体组成的集合. 对于l^p中的任意两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，定义

$$(1.3)\qquad d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

容易验证，d 满足($M1$)和($M2$). 为了证明 d 满足 ($M3$)，我们需要下面两个重要的不等式.

引理 1.4 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^q$，这里 $p>1,q>1$且满足$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $xy=(\xi_1\eta_1,\xi_2\eta_2,\cdots)\in l^1$,并且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\qquad(\text{Hölder不等式}).$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，得到下面的 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

引理 1.5 设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p(p\geqslant1)$，则 $x+y\in l^p$,并且

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i+\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

(Minkowski 不等式).

这两个引理将在稍后证明. 现在我们利用 Minkowski 不等式来验证由(1.3)定义的 $d(x,y)$满足($M3$)，即三角不等式. 事实上，对于 l^p 中任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$，$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots)$，

$$\begin{aligned}d(x,y)&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}(|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\zeta_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=d(x,z)+d(z,y).$$

因此，l^p 关于(1.3)定义的度量 d 成为度量空间.

现在，我们来证明引理 1.4 和引理 1.5.

引理 1.4 的证明 对于 $p>1, q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$（这样的两个数 p, q 称为一对共轭数），可得到

$$pq=p+q, \text{或} (p-1)(q-1)=1.$$

若令 $u=t^{p-1}$，则可解出 $t=u^{q-1}$. 当 $\alpha>0, \beta>0$ 时，在 tu 坐标平面上（见图 1.1），$\alpha\beta$ 表示矩形的面积，从图 1.1 中可以看到下面的不等式成立：

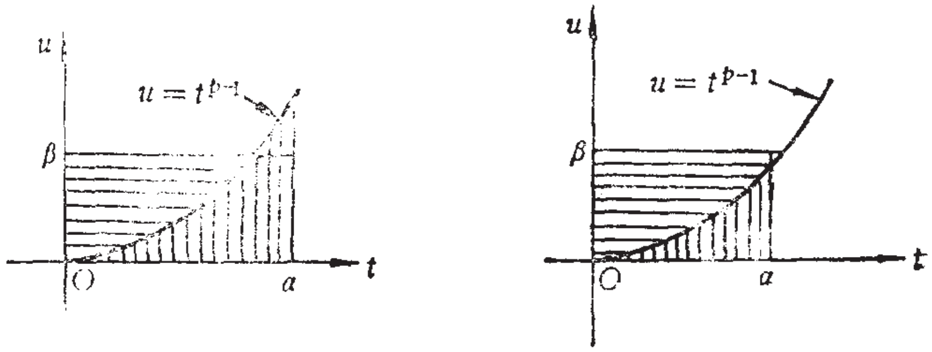


图 1.1

(1.4) $$\alpha\beta\leqslant\int_0^{\alpha}t^{p-1}dt+\int_0^{\beta}u^{q-1}du=\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}.$$

注意到当 $\alpha=0$ 或 $\beta=0$ 时，不等式(1.4)仍然成立，因此得到

(1.5) $$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}, \quad (\alpha\geqslant 0, \beta\geqslant 0).$$

不等式(1.5)称为 Young 不等式.

现在，对于任意非零的 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)\in l^p$ 和 $y=(\eta_1, \eta_2, \cdots)\in l^q$，令

$$\alpha=\frac{|\xi_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}},\qquad \beta=\frac{|\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}},$$

由不等式(1.5)

$$\frac{|\xi_i\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{|\xi_i|^p}{p\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p}+\frac{|\eta_i|^q}{q\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q},$$

求和，便得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\xi_i\eta_i|}{\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

因此，对于非零的 x,y，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 x 或 y 为零元素时，上式仍然成立. 引理 1.4 得证. □

引理 1.5 的证明 当 $p=1$ 时，Minkowski 不等式显然成立. 现在设 $p>1$. 令 $\omega_i=\xi_i+\eta_i$，由于

$$|\omega_i|^p=|\xi_i+\eta_i|\cdot|\omega_i|^{p-1}\leqslant(|\xi_i|+|\eta_i|)\cdot|\omega_i|^{p-1},$$

则对于任意的正整数 N，

$$\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\leqslant\sum_{i=1}^{N}|\xi_i||\omega_i|^{p-1}+\sum_{i=1}^{N}|\eta_i||\omega_i|^{p-1}. \tag{1.6}$$

应用 Hölder 不等式，并注意到 $(p-1)q=p$，得到

$$\sum_{i=1}^{N}|\xi_i||\omega_i|^{p-1}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}(|\omega_i|^{p-1})^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

同样地,

$$\sum_{i=1}^{N}|\eta_i||\omega_i|^{p-1}\leqslant\left[\sum_{i=1}^{N}|\eta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

把上面两个不等式代入(1.6),得

$$\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\leqslant\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\sum_{i=1}^{N}|\eta_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}\right\}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\right]^{\frac{1}{q}}.$$

由于$1-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}$,则上式可化为

$$\left(\sum_{i=1}^{N}|\omega_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{N}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{N}|\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因为$x\in l^p$, $y\in l^p$,所以当$N\to\infty$时,上式右端的极限存在,故左端的极限也存在,从而Minkowski不等式得证. □

例8 n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$. 对于$\mathbf{R}^n$中任意的$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$,定义

$$d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

则d是$\mathbf{R}^n$上的度量. 事实上,$(M1)$与$(M2)$显然成立;若把$\mathbf{R}^n$中的任意元素$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$对应于$l^2$中的元素$(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots)$,则应用Minkowski不等式可验证$(M3)$成立. 若定义

$$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|,$$

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|.$$

容易证明,d_1和d_∞也都是$\mathbf{R}^n$上的度量.

习　题

1. 设(X,d)是度量空间. 证明对于任意的$x,y,x',y'\in X$,

$$|d(x,y)-d(x',y')|\leqslant d(x,x')+d(y,y').$$

2. 在l^∞中,对于任意的两点$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$,定义

$$d(x,y)=\sup_{i\in N}|\xi_i-\eta_i|,$$

验证(l^∞,d)是一个度量空间.

3. 在$C[a,b]$中,对于任意的两点x,y,定义

$$d_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|dt,$$

证明d_1是$C[a,b]$上的一个度量.

4. 设(X,d)是度量空间,对于$x,y\in X$,定义

$$\tilde{d}(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)},$$

证明$(X,\tilde{d})$也是度量空间.

5. 设(X,d)是度量空间. 令

$$\rho(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}\quad(x,y\in X),$$

证明ρ是X上的度量.

§2　度量空间中的点集与子空间

在本节中,我们将要介绍的度量空间中的开集、闭集、邻域、闭包、内部等概念都可以在数直线$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^n$)中找到它们的模型. 这样, 可以借助实际的模型来帮助我们理解一般度量空间中这些点集的性质. 实际上,一般度量空间中这些点集的性质与$\mathbf{R}$(或$\mathbf{R}^n$)中相应的点集的性质之间有很多相同之处. 但是,我们也还要特别留心它们之间的差异.

定义 2.1　设(X,d)是度量空间,$x_0\in X$,r为大于零的实数.

$$B(x_0,r)=\{x\in X\,|\,d(x,x_0)<r\},$$

称为以x_0为中心、r为半径的开球(open ball).

$$\tilde{B}(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)\leqslant r\},$$

称为以 x_0 为中心、r 为半径的闭球(closed ball).

$$S(x_0,r)=\{x\in X \mid d(x,x_0)=r\},$$

称为以 x_0 为中心 r 为半径的球面(sphere).

在不同的度量空间中,为了更清楚地表明以 x_0 为中心 r 为半径的开球是度量空间 X 中的或是关于度量 d 的开球,我们记它为 $B_X(x_0,r)$ 或 $B_d(x_0,r)$. 对于闭球和球面也可类似地用附加下标的方式更清楚地表示它们. 为了使读者对于不同度量空间的开球有一个直观的认识,我们给出下面的例子.

例 1 在 $\mathbf{R}^2$ 中,对于任意的两点 $x=(\xi_1,\xi_2)$, $y=(\eta_1,\eta_2)$, 定义

$$d(x,y)=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2},$$

$$d_1(x,y)=|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|,$$

$$d_\infty(x,y)=\max(|\xi_1-\eta_1|+|\xi_2-\eta_2|),$$

则 d, d_1 和 d_∞ 都是 $\mathbf{R}^2$ 中的度量. 关于这三个不同的度量以零为中心的单位开球分别记为 $B_d(0,1)$, $B_{d_1}(0,1)$ 和 $B_{d_\infty}(0,1)$, 它们有如图 2.1 中的形式.

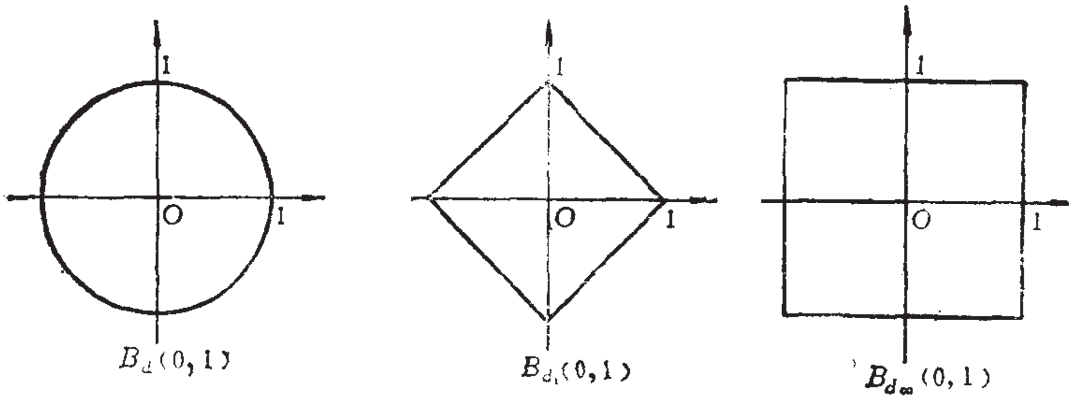


图 2.1

例 2 在 $C[a,b]$ 中,任意二元素 x 与 y 的距离定义为

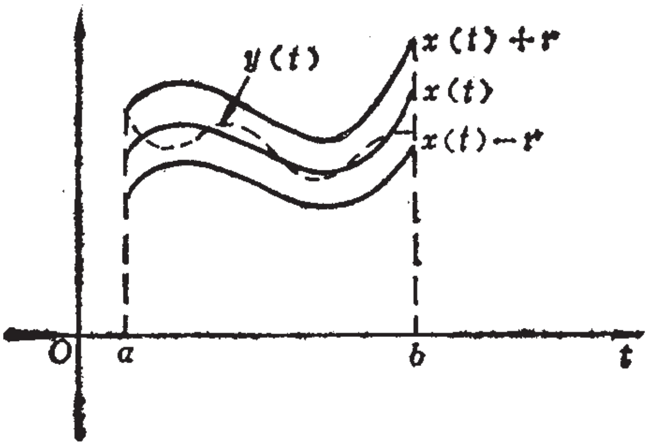


图 2.2

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|.$$

以 x 为中心、r 为半径的开球 $B(x,r)$ 有如图 2.2 中的形式. 从图中还可以看到,若 $y\in B(x,r)$,则 $y(t)$ 的图形完全落在以 $x(t)-r$ 与 $x(t)+r$ 构成的带形区域内.

例 3 设 (x,d) 是离散的度量空间(见 §1例 2), 则对于任何 $x\in X$,

$$B(x,1)=\{x\},$$

$$\tilde{B}(x,1)=X.$$

定义 2.2 设 A,B 是度量空间 X 的非空子集, $x\in X$

$$d(A,B)=\inf\{d(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

称为集 A 与 B 的距离. 点 x 到集 B 的距离, 记为 $d(x,B)$,定义为单点集 $\{x\}$ 与 B 的距离,即

$$d(x,B)=\inf\{d(x,y)\mid y\in B\}.$$

集 A 的直径(diameter),记为 $\delta(A)$,定义为

$$\delta(A)=\sup\{d(x,y)\mid x,y\in A\}.$$

若 $\delta(A)<+\infty$,则称 A 是有界的(bounded); 否则称 A 是无界的(unbounded).

引理 2.3 度量空间 X 中,点集 A 是有界的,当且仅当 A 包含

在某一个开球内.

证明 "⇒"设$\delta(A)=r$. 取定$x\in A$,则$A\subset B(x,r+1)$. 事实上,对任意$y\in A$,由$d(x,y)\leqslant\delta(A)=r<r+1$,得$y\in B(x,r+1)$.

"⇐"设$A\subset B(x_0,r)$. 对于任意的$x,y\in A$,

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_0)+d(x_0,y)<r+r=2r,$$

取上确界则得到$\delta(A)\leqslant 2r$. □

定义 2.4 设G,F是度量空间X中的子集. 若对于每一点$x\in G$,有一个开球$B(x,r)$,使得$B(x,r)\subset G$,则G称为X中的开集(open set). 若F的余集F^c是X中的开集,则F称为X中的闭集(closed set).

由定义,空集可认为是开集,显然全空间X是开集,从而$\varnothing$和X也都是闭集.

开球$B(x,r)$是开集,闭球$\tilde{B}(x,r)$是闭集. 事实上,若$y\in B(x,r)$,则$d(x,y)<r$. 令$r_0=r-d(x,y)$. 对于任意的$z\in B(y,r_0)$,由三角不等式$d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z)<d(x,y)+r_0=r$,故$z\in B(x,r)$. 因此,$B(y,r_0)\subset B(x,r)$. 这就证明了$B(x,r)$是开集. 又若$y\in(\tilde{B}(x,r))^c$,则$d(x,y)>r$. 令$r_1=d(x,y)-r$. 对于任意的$z\in B(y,r_1)$,由于$d(x,z)\geqslant d(x,y)-d(y,z)>d(x,y)-r_1=r$,故$z\in(\tilde{B}(x,r))^c$. 因此,$B(y,r_1)\subset(\tilde{B}(x,r))^c$. 这表明$(\tilde{B}(x,r))^c$是开集. 从而$\tilde{B}(x,r)$是闭集.

开集和闭集具有下面的性质.

定理 2.5 在度量空间X中,

(1) 任意多个开集的并是开集;

(2) 有限多个开集的交是开集;

(3) 任意多个闭集的交是闭集;

(4) 有限多个闭集的并是闭集.

证明 (1)设$\{G_\alpha\}_{\alpha\in D}$是一族开集,$G\doteq\bigcup_{\alpha\in D}G_\alpha$. 若$x\in G$,则存在

$\alpha\in D$,使得 $x\in G_\alpha$,于是存在$r>0$,使得 $B(x,r)\subset G_\alpha\subset G$. 因此 G 是开集.

(2) 仅就两个开集的情况证明. 设 A_1,A_2 是开集. 若 $x\in A_1\cap A_2$, 则存在 $r_1,r_2>0$,使得$B(x,r_1)\subset A_1$, $B(x,r_2)\subset A_2$. 取$r=\min(r_1,r_2)$,则 $B(x,r)\subset A_1\cap A_2$. 因此 $A_1\cap A_2$ 是开集.

(3)和(4)的证明,应用 de Morgan 公式,可立即得出. □

需要指出,无限多个开集的交不一定是开集,无限多个闭集的并不一定是闭集.

定义 2.6 设V是度量空间X的子集,$x_0\in V$. 若存在$r>0$,使$B(x_0,r)\subset V$, 则V称为 x_0 的邻域(neighborhood). 若 x_0 的邻域 V 是开集,则V称为x_0的开邻域(open neighborhood).

显然, 任一非空开集是它的每一点的开邻域; 若V是 x 的邻域,则 $x\in V$;若 V 是 x 的邻域且 $V\subset U$,则 U 是 x 的邻域.

定义 2.7 设A是度量空间X的子集. 若A是点x的邻域,则x称为A的内点(interior point). A的所有内点组成的集称为A的内部(interior),记为 A°.

显然由定义知,$x\in A^\circ$ 当且仅当存在 $r>0$,使 $B(x,r)\subset A$. 集合的内部具有如下的性质.

定理 2.8 设A和B是度量空间X的子集,则

(1) A° 是包含在A中的最大开集,从而

$$A^\circ=\bigcup\{G\mid G\text{ 是开集且 }G\subset A\};$$

(2) A 是开集,当且仅当 $A=A^\circ$;

(3) 若$A\subset B$,则$A^\circ\subset B^\circ$;

(4) $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$.

证明 (1) 先证 A° 是开集. 若 $x\in A^\circ$, 则存在 $r>0$, 使$B(x,r)\subset A$. 对于任意的$y\in B(x,r)\subset A$,则 A是 y 的邻域. 这表明$B(x,r)\subset A^\circ$. 因此 A° 是开集. 现设 G 是开集且 $G\subset A$. 若$x\in G$,

则 G 是 x 的邻域，从而 A 是 x 的邻域. 因此 $x\in A^\circ$. 这就证明了 $G\subset A^\circ$，即 A° 是包含在 A 中的最大开集.

(2) 由定义得到 $A^\circ\subset A$. 又若 $x\in A$，由假设 A 是开集，则 A 是 x 的邻域，故 $x\in A^\circ$. 因此 $A=A^\circ$. 必要性得证. 由(1)，充分性立即得证.

(3) $x\in A^\circ$，则 A 是 x 的邻域. 而 $A\subset B$，则 B 是 x 的邻域，故 $x\in B^\circ$.

(4) 由于 $A\cap B\subset A$，由(3)得到 $(A\cap B)^\circ\subset A^\circ$. 同理 $(A\cap B)^\circ\subset B^\circ$. 因此 $(A\cap B)^\circ\subset A^\circ\cap B^\circ$. 另一方面，由于 $A^\circ\cap B^\circ$ 是开集，且 $A^\circ\cap B^\circ\subset A\cap B$，而 $(A\cap B)^\circ$ 是包含于 $A\cap B$ 中的最大开集，则得到 $A^\circ\cap B^\circ\subset(A\cap B)^\circ$. 所以 $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$. □

定义 2.9 设 A 是度量空间 X 的子集，$x\in X$. 若 x 的每一个邻域 V 都包含有异于 x 的 A 的点，即 $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\varnothing$，则 x 称为 A 的聚点(accumulation point)或极限点(limit point). A 的所有聚点的全体组成的集称为 A 的导集(derived set)，记为 A'. 集 $\bar{A}=A\cup A'$ 称为 A 的闭包(closure). $A\setminus A'$ 中的点称为 A 的孤立点(isolated point). 若 $A=A'$，则 A 称为完全集(complete set).

闭包 $\bar{A}$ 的点有下面的特征.

引理 2.10 $x\in\bar{A}$ 的充分必要条件是，对 x 的每一个邻域 V，都有 $A\cap V\neq\varnothing$.

证明 设 $x\in\bar{A}=A\cup A'$. 对 x 的每一个邻域 V，若 $x\in A$，则 $A\cap V\neq\varnothing$；若 $x\in A'$ 且 $x\notin A$，则 $A\cap V=A\cap(V\setminus\{x\})\neq\varnothing$. 反过来，若对 x 的每一个邻域 V 都有 $A\cap V\neq\varnothing$，则从 $x\in A$ 可推出 $x\in\bar{A}$；又从 $x\notin A$ 可推出 $A\cap(V\setminus\{x\})=A\cap V\neq\varnothing$，即 $x\in A'\subset\bar{A}$. □

由于 $x\in\bar{A}^c\Leftrightarrow x\notin\bar{A}\Leftrightarrow$ 存在 x 的邻域 V，使 $A\cap V=\varnothing\Leftrightarrow$ 存在 x 的邻域 V，使 $V\subset A^c\Leftrightarrow x\in A^{c\circ}$ ($A^{c\circ}$ 表示 A^c 的内部). 因此，集的闭包与内部之间有一个重要的关系：

(2.1) $$\bar{A}^c = A^{c\circ}, \text{或} \bar{A} = A^{c\circ c}.$$

记号 $A^{c\circ c}$ 表示 $A^{c\circ}$ 的余集. 如果在上面的第一式中把 A^c 换为 A, 用记号 A^{c-} 表示 A^c 的闭包, 记号 A^{c-c} 表示 A^{c-} 的余集, 则得到

(2.2) $$A^\circ = A^{c-c}.$$

与集合的内部的性质相对应, 集合的闭包具有如下性质.

定理 2.11 设 A 和 B 是度量空间 X 的子集, 则

(1) $\bar{A}$ 是包含 A 的最小闭集, 从而

$$\bar{A} = \bigcap \{F \mid F \text{ 是闭集且 } F \supset A\};$$

(2) A 是闭集, 当且仅当 $A = \bar{A}$;

(3) 若 $A \subset B$, 则 $\bar{A} \subset \bar{B}$;

(4) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

(5) $x \in \bar{A}$ 当且仅当 $d(x, A) = 0$.

证明 (1) 因为 $A^{c\circ}$ 是包含在 A^c 中的最大开集, 由关系式 (2.1), 则 $\bar{A} = A^{c\circ c}$ 是包含 A 的最小闭集.

(2) A 是闭集 $\Leftrightarrow A^c$ 是开集 $\Leftrightarrow A^c = A^{c\circ} = \bar{A}^c \Leftrightarrow A = \bar{A}$.

(3) 对于 $x \in \bar{A}$, 由于 $A \subset B$, 则对 x 的每一个邻域 V 都有 $B \cap V \supset A \cap V \neq \varnothing$, 故 $x \in \bar{B}$.

(4) $\overline{A \cup B} = (A \cup B)^{c\circ c} = (A^c \cap B^c)^{\circ c} = (A^{c\circ} \cap B^{c\circ})^c = A^{c\circ c} \cup B^{c\circ c} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

(5) $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ 对 x 的每一个邻域 V 皆有 $A \cap V \neq \varnothing \Leftrightarrow d(x, A) = 0$. 事实上, 前一个等价关系可由引理 2.10 得到. 现在只须证明后一个等价关系. 首先证明必要性. 对于任意的 $\varepsilon > 0$, 由于 $B(x, \varepsilon)$ 是 x 的邻域, 故 $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$, 即存在 $y \in A$ 且 $y \in B(x, \varepsilon)$, 从而 $d(x, y) < \varepsilon$. 于是由 ε 的任意性知

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y) = 0.$$

其次证明充分性. 设 $d(x, A) = 0$. 对于 x 的任一邻域 V, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B(x, \varepsilon) \subset V$. 对此 ε, 我们有 $A \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$. (因为

假若 $A\cap B(x,\varepsilon)=\varnothing$，则对每一个 $y\in A$ 有 $d(x,y)\geqslant\varepsilon$，从而

$$d(x,A)=\inf_{y\in A}d(x,y)\geqslant\varepsilon>0,$$

得到矛盾.）因此

$$A\cap V\supset A\cap B(x,\varepsilon)\neq\varnothing. \qquad \square$$

定义 2.12 设 X 是度量空间，$A,B\subset X$. 若 $\bar{A}\supset B$，则称 A 在 B 中稠密(dense). 特别地，若 $\bar{A}=X$，则称 A 在 X 中稠密. 若 X 中有一个可数稠密的子集(即 X 中有一个可数集 B，使 $\bar{B}=X$)，则 X 称为是可分的(separable).

由定义，A 在 X 中稠密，就是说，对每一点 $x\in X$，x 的每一个邻包含有 A 中的点，或者等价地说(见习题 4)，对每一点 $x\in X$，每一个开球 $B(x,r)$ 都包含有 A 中的点.

例 4 数直线 $\mathbf{R}$ 是可分的，因为全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$ 是可数的，并且在 $\mathbf{R}$ 中稠密.

例 5 复平面 $\mathbf{C}$ 是可分的，因为实部和虚部都是有理数的复数的全体组成的集合是可数的，并且在 $\mathbf{C}$ 中稠密.

例 6 l^p 空间($1\leqslant p<\infty$)是可分的. 事实上，令

$$A=\{y\in l^p\mid y=(\eta_1,\cdots,\eta_n,0,0,\cdots),\ \eta_1,\cdots,\eta_n\text{为有理数},\ n\in\mathbf{N}\},$$

则 A 是可数的. 现在证明 A 在 l^p 中稠密. 对于任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n\in\mathbf{N}$，使得

$$\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

由于有理数在 $\mathbf{R}$ 中稠密，因此对于每一个 ξ_i 可以找到非常接近的有理数 $\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$，也就是说，存在 $y\in A$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

于是

$$(d(x,y))^p=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^p+\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\varepsilon^p,$$

故 $d(x,y)<\varepsilon$. 这证明了 A 在 l^p 中稠密.

例 7 l^∞ 空间是不可分的. 事实上,令

$$F=\{y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^\infty \mid \eta_i=0 \text{ 或 } 1, i\in \mathbf{N}\},$$

每一个 $y\in F$ 对应于$[0,1]$中一个数的二进位表示. 因此 F 是不可数的. 并且对于任意的 $y_1\in F, y_2\in F$, 若 $y_1\neq y_2$, 则

$$B\left(y_1,\frac{1}{3}\right)\cap B\left(y_2,\frac{1}{3}\right)=\varnothing.$$

若 A 是任意一个在 X 中稠密的集, 则以每一个 F 的点 y 为中心的开球 $B\left(y,\frac{1}{3}\right)$必含有 A 中的点,这意味着 A 必然是不可数的. 因此 l^∞ 是不可分的.

最后, 我们简要地介绍度量空间的子空间的概念. 关于子空间中的点集,我们放在附录中讨论,对读者有一个参考的价值.

定义 2.13 设(X,d)是度量空间,Y 是X的子集. X 上的距离函数 d 在 $Y\times Y$ 上的限制记为 $\tilde{d}=d|_{Y\times Y}$, 即对任意的 $x,y\in Y$,

$$\tilde{d}(x,y)=d(x,y),$$

则 $\tilde{d}$ 是 Y 上的度量. 我们称$(Y,\tilde{d})$是(X,d)的子空间(subspace), 或者简单地说, Y 是X的子空间; $\tilde{d}$ 称为 d 导出的度量(induced metric).

通常,当度量空间X的任一子集Y看作X的子空间时,Y 的度量 $\tilde{d}$ 就是指由X的度量 d 导出的度量,并且 $\tilde{d}$ 常常被省略. 显然, 若Y是X的子空间,Z 是Y的子空间,则 Z 是X的子空间.

附　录

设Y是度量空间X的子空间,Y 是X的子集同时Y本身又是

一个度量空间．在此附录中，我们着重讨论子空间Y中的开球，开集，邻域，闭集等与X中的开球，开集，邻域，闭集等之间的关系．这将有助于对子空间的认识．

设(X,d)是度量空间，$Y\subset X$，$x\in Y$．我们用记号$B_Y(x,r)$和$B(x,r)$分别表示在子空间Y中的和空间X中的以x为中心r为半径的开球，则

$$B_Y(x,r)=\{y\mid y\in Y \text{ 且 } d(x,y)<r\}$$
$$=B(x,r)\cap Y.$$

须指出，子空间中的开集可以是也可以不是全空间中的开集．一般地说，关于子空间中开集的构成有如下的定理．

定理2.14 设Y是度量空间X的子空间，$A\subset Y$，则A是子空间Y中的开集当且仅当存在X中的开集G使得$A=G\cap Y$．

证明 "$\Rightarrow$" 设A是子空间Y中的开集．则对于每一个$x\in A$，存在(与x有关的正数)$r(x)$，使得$B_Y(x,r(x))=B(x,r(x))\cap Y\subset A$．令$G=\bigcup\limits_{x\in A}B(x,r(x))$．则$G$是$X$中的开集，且

$$A=\bigcup_{x\in A}B_Y(x,r(x))=\bigcup_{x\in A}(B(x,r(x))\cap Y)=G\cap Y.$$

"$\Leftarrow$"设存在X中的开集G，使得$A=G\cap Y$．对于每一个$x\in A$，则存在$r(x)>0$使得$B(x,r(x))\subset G$．故

$$B_Y(x,r(x))=B(x,r(x))\subset Y\subset G\cap Y=A,$$

即A是Y中的开集． □

设Y是度量空间X的子空间，$A\subset Y$，$x\in Y$．由定理 2.14 容易推出下列结论是成立的．

(1) Y中任一开集都是X中的开集，当且仅当Y是X中的开集．

(2) A是Y中x的邻域，当且仅当存在X中x的邻域V使得$A=V\cap Y$．

(3) Y中任一x的邻域都是X中x的邻域，当且仅当Y是X

中 x 的邻域.

(4) A 是 Y 中的闭集，当且仅当存在 X 中的闭集 F 使得 $A=F\cap Y$.

(5) Y 中任一闭集都是 X 中的闭集，当且仅当 Y 是 X 中的闭集.

习　题

1. 证明定理 2.5(3)和(4).

2. 设 (X,d) 是离散的度量空间.

(1) 证明 X 的任一子集都是既开又闭的.

(2) 若 X 包含两个以上的元素，对任意的 $x\in X$，证明

$$\overline{B(x,1)}\neq\widetilde{B}(x,1).$$

从而说明，在度量空间中，开球 $B(x,r)$ 的闭包不一定是闭球 $\widetilde{B}(x,r)$.

3. 设 X 是一个度量空间，$A\subset X$，$x,y\in X$，证明

$$|d(x,A)-d(y,A)|\leqslant d(x,y).$$

4. 设 X 是度量空间，$A\subset X$. 证明

(1) A 是 X 中的开集，当且仅当 A 是一族开球的并.

(2) x 是 A 的聚点，当且仅当对每一个 $r>0$，都有 $A\cap(B(x,r)\setminus\{x\})\neq\varnothing$;

(3) $x\in\bar{A}$，当且仅当对每一个 $r>0$ 都有 $A\cap B(x,r)\neq\varnothing$;

(4) A 在 X 中稠密，当且仅当对每一点 $x\in X$ 及每一个 $r>0$ 均有 $A\cap B(x,r)\neq\varnothing$.

5. 证明：离散的度量空间 X 是可分的，当且仅当 X 是可数的.

6. 设 (X,d) 是度量空间，A 是 X 的非空子集，$r>0$.

令

$$B(A,r)=\{y\in X\mid d(y,A)<r\}.$$

证明 $B(A,r)=\bigcup\limits_{x\in A}B(x,r)$.

7. 设 (X,d) 是度量空间，$A\subset X$. 证明 A 在 X 中稠密当且仅当对 X 中任何非空开集 G，皆有 $A\cap G\neq\varnothing$.

8. 设 $B[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上实值有界函数的全体. 对于 $f,g\in B[a,b]$，定义

$$d(f,g)=\sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|.$$

证明$(B[a,b],d)$是不可分的度量空间.

§3 数直线上的点集

在本节中，我们约定所考虑的点集都是数直线上（即 R 中）的集合. R 中任意两点 x,y，定义

$$d(x,y)=|x-y|.$$

则 d 是 R 上的度量. 通常我们说 R 是一个度量空间，就是指关于此度量 d 的度量空间. 对于 $x\in\mathbf{R}$ 及 $r>0$，以 x 为中心 r 为半径的开球

$$B(x,r)=(x-r,x+r)$$

是一个开区间，也常称为以 x 为中心、r 为半径的开邻域. 反过来，R 中的每一个开区间 (a,b) 是一个以$\frac{a+b}{2}$为中心、$\frac{b-a}{2}$为半径的开邻域.

在前面两节中讨论的度量空间是以数直线 R 为模型的推广. 因此，前面在度量空间中定义的一系列概念，如开集、闭集、邻域、内点、内部、聚点、导集、闭包、稠密、可分等，以及有关的性质在 R 中都可以引用. 由于数直线 R 本身具有的特征，本节着重讨论 R 中的开集与闭集的结构以及一个重要的集合—Cantor 集.

1. 数直线上开集的构造

设 G 是 R 中任一非空有界开集. 由定义 2.4，对于任意 $x_0\in G$，存在开区间 (x,y)，使 $x_0\in(x,y)\subset G$. 当然这种开区间有无穷多个，其并记为 U，即

$$U=\bigcup\{(x,y)\mid x_0\in(x,y)\subset G\}.$$

则 U 是一个开区间，不妨设 $U=(\alpha,\beta)$. 显然 $x_0\in(\alpha,\beta)$，且具有下列性质:

(1) $(\alpha,\beta)\subset G$;

(2) $\alpha\notin G, \beta\notin G$.

性质(1)是成立的. 这是因为含 x_0 的每个开区间$(x,y)\subset G$, 所以$(\alpha,\beta)\subset G$. 性质(2)也是成立的. 事实上, 假若 $\beta\in G$, 则由于G是开集, 故必存在 $r>0$, 使$(\beta-r,\beta+r)\subset G$, 从而$(\beta-r,\beta+r)\subset U=(\alpha,\beta)$. 这是不可能的. 故 $\beta\notin G$. 同样可证 $\alpha\notin G$.

性质(1)和(2)告诉我们,$U=(\alpha,\beta)$是G中含有 x_0的最大开区间.

定义 3.1 设有界开集 $G\subset\mathbf{R}$,若开区间$(\alpha,\beta)\subset G$, 而α,β都不属于G,则称(α,β)为G的一个构成区间.

显然,G中的任一点必属于G的某一构成区间. 下面的定理表明了非空开集的结构.

定理3.2 设G是$\mathbf{R}$中的非空有界开集, 则G可唯一地表示为至多可数个互不相交的开区间之并, 即 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$, 其中$m$为正整数或为$\infty$. 并且对于任何$k$,$(\alpha_k,\beta_k)$都是$G$的构成区间.

证明 由上面的讨论知, G中的任一点必属于G的某一构成区间. 现证G中任意两个构成区间或重合或不相交. 设(α,β), (α',β')是G的任意两个构成区间.若它们有公共点 x,即 $x\in(\alpha,\beta)$且$x\in(\alpha',\beta')$,由于$x\in G$, 而G的构成区间(α,β),(α',β')是G中含有x的最大开区间, 所以(α,β)与(α',β')必重合. 故G的任意两个构成区间或重合或不相交.

由第一章§3例5知, 直线上互不相交的开区间集至多是可数的. 因此,G的构成区间全体可记为

$$(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_m,\beta_m),$$

其中m为正整数或为∞.

再证G可表示为它的所有构成区间之并,即

$$G=\bigcup_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k),\qquad (m\text{ 为正整数或为}\infty)$$

对于任意 $x\in G$，由于 G 中任一点必属于 G 的某个构成区间，所以存在正整数 k_0，使 $x\in(\alpha_{k_0},\beta_{k_0})$，从而 $x\in\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\ \beta_k)$，即 $G\subset\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$. 另一方面，由构成区间的定义有 $G\supset\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\ \beta_k)$，故 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m}(\alpha_k,\beta_k)$.

最后证明 G 的结构表示 $G=\bigcup\limits_{k=1}(\alpha_k,\ \beta_k)$ 是唯一的，其中 $(\alpha_k,\beta_k)\cap(\alpha_i,\beta_i)=\varnothing\,(k\neq i)$. 设 $G=\bigcup\limits_{n=1}(\alpha'_n,\beta'_n)$ 是一组互不相交的开区间的并，只需证明每个 (α'_n,β'_n) 是 G 的构成区间即可. 如若不然，例如 $\alpha'_n\in G$，则必存在某个 (α'_μ,β'_μ)，使 $\alpha'_n\in(\alpha'_\mu,\ \beta'_\mu)$，于是，$(\alpha'_n,\beta'_n)\cap(\alpha'_\mu,\beta'_\mu)\neq\varnothing$，出现矛盾. 至此，定理得证. □

对于数直线上的无界开集情形，定理 3.2 的结论本质上也是正确的，只是要把 $(-\infty,+\infty)$，$(-\infty,\alpha)$ 与 $(\beta,+\infty)$ $(\alpha,\ \beta$ 为实数$)$ 都算成构成区间的表现形式.

2. 数直线上的闭集的构造

数直线上的闭集的结构可以从它的余集考虑. 设 F 是 $\mathbf{R}$ 中的闭集且 $F\neq\mathbf{R}$，则 F^c 是 $\mathbf{R}$ 中的非空开集. 而开集可表示为至多可数个互不相交的开区间之并，故闭集 F 是由数直线上去掉至多可数个互不相交的开区间而成. 因此，有下列定理 3.3.

定理 3.3 数直线上的闭集是由数直线上去掉至多可数个互不相交的开区间而成.

闭集 F 的余集 F^c 的构成区间称为 F 的余区间(complementa-

ry interval).

3. 数直线上的完全集

设 $A\subset\mathbb{R}$. 若 $A=A'$,则称 A 为完全集(见定义 2.9). 完全集 A 包含了 A 的全部聚点. 且由 $A=A'$ 可导出 $A=A'\cup A=\bar{A}$, 即 A 是闭集. 因此, 可以说完全集是没有孤立点的闭集. 对于任一点集 $A\subset\mathbb{R}$, 其孤立点是余集 A^c 内两个开区间的公共端点. 因此, 闭集的孤立点是它的两个相邻接的余区间的公共端点. 因而完全集的余区间没有公共端点. 从而得到: 数直线上的完全集是各余区间不相邻接的闭集.

4. Cantor 集

将闭区间 $[0,1]$ 三等分, 去掉中间的一个开区间 $I_1^{(1)}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 把剩下的两个闭区间 $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 分别再三等分, 再各去掉中间的开区间

$$I_1^{(2)}=\left(\frac{1}{3^2},\ \frac{2}{3^2}\right),\ I_2^{(2)}=\left(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2}\right).$$

余下四个闭区间为 $\left[0,\frac{1}{3^2}\right]$, $\left[\frac{2}{3^2},\frac{3}{3^2}\right]$, $\left[\frac{6}{3^2},\frac{7}{3^2}\right]$, $\left[\frac{8}{3^2},1\right]$. 又分别把这些闭区间三等分, 再各去掉其中间的开区间

$$I_1^{(3)}=\left(\frac{1}{3^3},\frac{2}{3^3}\right),\ I_2^{(3)}=\left(\frac{7}{3^3},\frac{8}{3^3}\right),\ I_3^{(3)}=\left(\frac{19}{3^3},\frac{20}{3^3}\right),\ I_4^{(3)}=\left(\frac{25}{3^3},\frac{26}{3^3}\right).$$



图 3.1 Cantor 三分集示意图

如此继续下去, 在第 n 次三等分时去掉的开区间称为第 n 级区间, 它们是

$$I_1^{(n)}=\left(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}\right),I_2^{(n)}=\left(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}\right),\cdots,\ I_{2^n-1}^{(n)}=\left(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}\right).$$

在上述作法下，自然在闭区间$[0,1]$上有些点是永远删不去的，如$\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2},\cdots$. 这些点就是所有被删去的开区间的端点. 令

$$G_0=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^n-1}I_k^{(n)}.$$

由于任意多个开集的并仍为开集，故G_0是开集. 我们称

$$P_0=[0,1]\backslash G_0$$

为 Cantor 集(Cantor set). 从上面的删去方法容易看出，Cantor 集就是那些永远删不去的点的全体组成的集合；Cantor 集P_0是一个闭集，并且不包含任何开区间. 因而P_0不含有任何内点. 同时，还可以看出，G_0的构成区间就是那些被删去的各个开区间；G_0的任何两个构成区间都没有公共的端点.

关于 Cantor 集P_0有如下结论.

定理 3.4 Cantor 集P_0是一个不可数的完全集.

证明 先证P_0是完全集，即证明$P_0=P_0'$(P_0'是P_0的导集). 因为P_0是闭集，故$P_0'\subset P_0$. 于是，只需证$P_0\subset P_0'$，即证P_0无孤立点即可. 采用反证法. 假若P_0有孤立点x_0，因为点 0, 1 是P_0的聚点，所以$x_0\neq 0,x_0\neq 1$. 于是存在含有x_0的在(0, 1)内的开区间(α_0,β_0)，使得

$$((\alpha_0,\beta_0)\setminus\{x_0\})\cap P_0=\varnothing.$$

显然$(\alpha_0,x_0)\cap P_0=\varnothing$，从而$(\alpha_0,x_0)\subset G_0$. 同样，$(x_0,\beta_0)\cap P_0=\varnothing$，从而$(x_0,\beta_0)\subset G_0$. 因为$G_0$是开集，由开集的构造知，$(\alpha_0,\ x_0)$，$(x_0,\beta_0)$是分别含于$G_0$的某两个构成区间，于是$x_0$将成为$G_0$中的某两个构成区间的公共端点。此与$G_0$的作法相矛盾. 所以，$P_0$无孤立点，即$P_0\subset P_0'$. 因此 Cantor 集是个完全集.

余下证明 P_0 是不可数集. 采用反证法. 假若 P_0 是可数集, 于是 P_0 中的点可排成一个无穷序列的形式

$$P_0=\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}.$$

据 P_0 的定义知, $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ 与 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 中应至少有一个不含 x_1, 把这个闭区间记为 I_1. 将 I_1 三等分所得的左与右两个闭区间中, 至少有一个不含 x_2, 把此闭区间记为 I_2. 如此等等, 得到一个闭区间列 $\{I_k\}$, 并且满足下列条件

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_k\supset\cdots,$$

$$x_k\notin I_k \quad (k\in\mathbf{N}),$$

$$|I_k|=\frac{1}{3^k}\to 0\,(k\to\infty).$$

所以据《数学分析》中的区间套定理, 必存在点 $\xi\in I_k$, $(k\in\mathbf{N})$. 但 ξ 是 I_k 等的端点集的聚点, 因而 ξ 也是 P_0 的聚点. 由于 P_0 是闭集, 故 $\xi\in P_0$. 又 $x_k\notin I_k(k\in\mathbf{N})$, 故 $\xi\neq x_k(k\in\mathbf{N})$. 这就出现了矛盾. 因此 P_0 是不可数集. □

若将 $[0,1]$ 中的点用三进位小数表示, 我们可以进一步指出, Cantor 集 P_0 的基数实际上与 $[0,1]$ 的相同, 即它的基数为 $\aleph$.

习　题

1. 设 G_1, G_2 是 $\mathbf{R}$ 中的开集, 且 $G_1\subset G_2$, 试证 G_1 的每个构成区间必含在 G_2 的某个构成区间之中.

2. 设 G_1, G_2 是 $\mathbf{R}$ 中的两个不相交的开集. 试证

$$G_1\cap\overline{G}_2=\varnothing.$$

3. 设 E 为 Cantor 集 P_0 的所有余区间的并集, 试求 E 的导集 E'.

4. 设点集列 $\{E_n\}$ 是有限区间 $[a,b]$ 中的渐缩序列: $E_1\supset E_2\supset\cdots$, 且每个 E_n 均为非空闭集, 试证交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\neq\varnothing$.

5. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是直线上的有限个集，证明

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' \subset A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n'.$$

6. 证明直线上的孤立点集必是有限集或可数集.

7. 证明每个闭集可以表示为可数个开集的交集，每个开集可以表示为可数个闭集的并集.

8. 设 f 是定义在数直线 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数，证明：对任意的实数 a，若令

$$F_a = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geqslant a\}, G_a = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > a\}.$$

则 F_a 是闭集而 G_a 是开集.

§4 收敛序列·连续映射

我们知道，在数直线 $\mathbb{R}$ 上，实数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a（记为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$）的定义为：对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对一切的 $n > N$，总有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立. 同时，还知道，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$. 推广到一般的度量空间中，关于序列收敛的概念，有下面的定义.

定义 4.1 设 $\{x_n\}$ 是度量空间 X 中的序列. 若存在 $x \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$，则称序列 $\{x_n\}$ 是收敛的(convergent)，x 称为 $\{x_n\}$ 的极限(limit)，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

或简记为 $x_n \to x$. 若 $\{x_n\}$ 不收敛，则称 $\{x_n\}$ 是发散的(divergent).

显然，在上面的定义中可以用如下 ε-N 的语言来描述序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x：对任意 $\varepsilon > 0$，存在正整数 N，使得对一切的 $n > N$，有

$$d(x_n, x) < \varepsilon.$$

这表明，满足 $n>N$ 的各个 x_n 皆落在以 x 为中心、ε 为半径的开球 $B(x,\varepsilon)$ 中，即 $x_n\in B(x,\varepsilon)\,(n>N)$.

收敛序列有下列性质.

引理 4.2 设 (X,d) 是度量空间，则

(1) 在 X 中收敛的序列是有界的；

(2) 在 X 中收敛序列的极限是唯一的；

(3) 若在 X 中 $x_n\to x, y_n\to y$，则 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$. 特别地，若 $x_n\to x$，则 $d(x_n,y)\to d(x,y)$.

证明 (1) 设 $x_n\to x$，取 $\varepsilon=1$，则存在 N，使得对一切的 $n>N$ 有 $d(x_n,x)<1$. 令

$$r=\max\{d(x_1,x),\cdots,d(x_N,x),1\},$$

则对所有的 $n\in\mathrm{N}$，有 $d(x_n,x)<r+1$. 由引理 2.3，$\{x_n\}$ 是有界的.

(2) 若 $x_n\to x$，又 $x_n\to y$，由于

$$d(x,y)\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,y)\to 0\,(n\to\infty),$$

则 $d(x,y)=0$，从而 $x=y$.

(3) 由引理 1.2(2)，有不等式

$$|d(x_n,y_n)-d(x,y)|\leqslant d(x_n,x)+d(y_n,y).$$

应用假设条件 $x_n\to x$ 及 $y_n\to y$，则上述不等式的右端当 $n\to\infty$ 时趋于 0。从而得到 $d(x_n,y_n)\to d(x,y)$. □

在引理 4.2(3)中，度量所具有的这种性质常称为度量（或距离函数）的连续性. 在度量空间中，可以用序列的收敛性来刻划集合的闭包和闭集的特征.

定理 4.3 设 A 是度量空间 X 的子集.

(1) $x\in\bar{A}$，当且仅当存在 A 中的序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x$.

(2) A 是闭集，当且仅当对于 A 中任意的序列 $\{x_n\}$，若 $x_n\to x$，则 $x\in A$.

证明 (1) 设 $x\in\bar{A}$，由引理 2.10，对于每一个 $n\in\mathrm{N}$ 则有

$A\cap B\left(x,\frac{1}{n}\right)\neq\varnothing$. 于是可取$x_n\in A\cap B\left(x,\frac{1}{n}\right)$，则序列$\{x_n\}$在$A$中且$x_n\to x$. 反过来，设$A$中的序列$\{x_n\}$，$x_n\to x$，则对于任意$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使得$x_n\in B(x,\varepsilon)$ $(n>N)$，从而$A\cap B(x,\varepsilon)\neq\varnothing$. 由引理2.10及§2习题4(3)，得到$x\in\bar{A}$.

(2) 因为A是闭集当且仅当$A=\bar{A}$(定理2.11(2))，若$\{x_n\}\subset A$，使得$x_n\to x$，由(1)则得$x\in\bar{A}=A$. 反之，欲证明集合A是闭集，只要证明$\bar{A}\subset A$. 事实上，对任意$x\in\bar{A}$，由(1)知，存在A中的序列$\{x_n\}$，使得$x_n\to x$. 由假设得到$x\in A$. 故$\bar{A}\subset A$. □

值得注意，在上述证明中证明一个集合为闭集的方法是经常被采用的.

例1 设$\{x_n\}$是$C[a,b]$中的序列. 若$x_n\to x$，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在正整数$N=N(\varepsilon)$，使得当$n>N$时

$$d(x_n,x)=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

从而，当$n>N$时对每一个$t\in[a,b]$均有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon, \tag{4.1}$$

即$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$

若$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$x(t)$，我们证明$x\in C[a,b]$. 事实上，对任意的$\varepsilon>0$，可选取一个充分大的n，使得(4.1)对每一个$t\in[a,b]$成立. 由于$x_n(t)$连续，则存在$\delta>0$，使得当$|t-t'|<\delta$时，有$|x_n(t')-x_n(t)|<\varepsilon$. 于是

$$\begin{aligned}|x(t')-x(t)|&\leqslant|x(t')-x_n(t')|+|x_n(t')-x_n(t)|\\&\quad+|x_n(t)-x(t)|\\&<\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明$x(t)$在任意点$t\in[a,b]$连续，即$x\in C[a,b]$. 并且由(4.1)式得到

$$d(x_n,x)=\max_{t\in[a,b]}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

这表明 $C[a,b]$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x.

归纳起来得到如下结论:

$C[a,b]$中的序列$\{x_n\}$收敛于 x,当且仅当$[a,b]$上的连续函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛于 $x(t)$.

在《数学分析》中.我们熟知在 $\mathbf{R}$ 中的集合 E 上的函数 f 连续和一致连续的概念. 把这两个概念推广到一般的度量空间, 有如下的定义.

定义 4.4 设(x,d)和(Y,ρ)是两个度量空间,f: $X\to Y$.

(1) 设 $x_0\in X$. 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$, 使得X中所有满足 $d(x,x_0)<\delta$ 的 x,有

$$\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon,$$

则称 f 在点 x_0 连续(continuous at a point x_0). 若f在X的每一点都连续,则称 f 在X 上连续(continuous).

(2) 若对于任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得对所有满足 $d(x,y)<\delta$ 的 x 和 y,有

$$\rho(f(x),f(y))<\varepsilon,$$

则称 f 在X上一致连续(uniformly continuous).

从上面的定义,容易看出下面简单的事实:

1. 若 f: $X\to Y$ 是一致连续的,则 f 是连续的. 但是, 其逆命题不成立.

2. f: $X\to Y$ 在点 $x_0\in X$ 连续, 当且仅当对于Y中以 $f(x_0)$ 为中心、任意 $\varepsilon>0$ 为半径的开球 $B_Y(f(x_0),\varepsilon)$, 存在X中以 x_0 为中心、$\delta>0$ 为半径的开球 $B_X(x_0,\delta)$, 使得

$$f(B_X(x_0,\delta))\subset B_Y(f(x_0),\varepsilon).$$

f连续的等价条件,除此之外,还表达在下面的两个定理之中.

定理 4.5 设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间,f: $X\to Y$, 则 f 在点 $x_0\in X$ 连续, 当且仅当对于X中任意的序列$\{x_n\}$, 若在X中

$x_n \to x_0$,则在 Y 中 $f(x_n) \to f(x_0)$.

证明 "$\Rightarrow$"设 f 在 x_0 连续,由定义,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得所有满足 $d(x, x_0)<\delta$ 的 x 均有

$$\rho(f(x), f(x_0))<\varepsilon.$$

若 $\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x_n \to x_0$,则存在正整数 N,使得一切 $n>N$ 有 $d(x_n, x_0)<\delta$. 从而对一切 $n>N$,

$$\rho(f(x_n), f(x_0))<\varepsilon.$$

因此,在 Y 中 $f(x_n) \to f(x_0)$.

"$\Leftarrow$"用反证法. 假若 f 在 x_0 点不连续,则存在 $\varepsilon>0$,使得对每一个 $\delta>0$ 有一个 $x_\delta \in X$,满足

$$d(x_\delta, x_0)<\delta \text{ 但 } \rho(f(x_\delta), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

特别地,取 $\delta=\frac{1}{n}$,则有 $x_n \in X$,满足

$$d(x_n, x_0)<\frac{1}{n} \text{但 } \rho(f(x_n), f(x_0)) \geqslant \varepsilon.$$

可见,$\{x_n\}$ 是 X 中的序列且 $x_n \to x_0$,但 $\{f_n(x_n)\}$ 不收敛于 $f(x_0)$. 此与假设条件矛盾 □

定理 4.6 设 (X, d) 和 (Y, ρ) 是两个度量空间,$f: X \to Y$,则下列各条等价.

(1) f 是连续的.

(2) 对于 Y 中任意的开集 G,$f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

(3) 对于 Y 中任意的闭集 F,$f^{-1}(F)$ 是 X 中的闭集.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 设 G 是 Y 中的开集,要证 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集. 若 $f^{-1}(G)=\varnothing$,则 $f^{-1}(G)$ 是开集. 现设 $f^{-1}(G) \neq \varnothing$,对于任意 $x \in f^{-1}(G)$,有 $f(x) \in G$. 由于 G 是开集,则存在 $\varepsilon>0$,使得 $B_Y(f(x), \varepsilon) \subset G$. 应用 f 在 x 连续的条件,存在 X 中的开球 $B_X(x, \delta)$,使

$$f(B_X(x, \delta)) \subset B_Y(f(x), \varepsilon) \subset G.$$

从而，

$$B_X(x,\delta)\subset f^{-1}(f(B_X(x,\delta))\subset f^{-1}(G).$$

因此 $f^{-1}(G)$ 是 X 中的开集.

(2) $\Rightarrow$ (1) 对任意 $x\in X$ 及任意 $\varepsilon>0$，由假设条件 $f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$ 是 X 中的开集，又 $x\in f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$，则存在 $\delta>0$，使得 $B_X(x,\delta)\subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon))$. 从而

$$f(B_X(x,\delta))\subset f(f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon)))\subset B_Y(f(x),\varepsilon).$$

这表明，f 在任意 $x\in X$ 连续. 因此 f 是连续的.

(2)与(3)等价的证明从下面的关系可立即得到：若 $f: X\to Y$，$A\subset Y$，则有关系式

$$f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A). \qquad \square$$

在这一节的末尾，我们给出两个度量空间等距的概念.

定义 4.7 (1) 设 (X,d) 和 (Y,ρ) 是两个度量空间，$f:X\to Y$. 若 f 是满射并且对 X 中的任意两点 x,y 均有

$$d(x,y)=\rho(f(x),f(y)),$$

则 f 称为 X 到 Y 上的等距映射(isometry).

(2) 若存在一个从度量空间 X 到度量空间 Y 上的等距映射，则称 X 与 Y 是等距的 (isometric)，或者说 X 与 Y 是等距空间 (isometric spaces).

从定义 4.7(1) 中可以看出，X 到 Y 上的等距映射 f 是单射. 事实上，由度量公理$(M1)$，若 $f(x_1)=f(x_2)$，必有

$$d(x_1,x_2)=\rho(f(x_1),f(x_2))=0,$$

则 $x_1=x_2$. 因此 f 是单射. 而定义中已假设 f 是满射，故 f 是双射.

习　题

1. 试证 $\mathrm{R}^2\to\mathrm{R}$ 的二映射 $(\xi_1,\xi_2)\mapsto\xi_1+\xi_2$ 和 $(\xi_1,\xi_2)\mapsto\xi_1\xi_2$ 都是连

续的.

2. 设 X,Y,Z 都是度量空间，$f:X\to Y$ 与 $g:Y\to Z$ 都是一致连续映射，则 $h=g\circ f$ 是 X 到 Z 的一致连续映射.

3. 设 f,g 是度量空间 X 上的实值连续函数，A 为 X 的稠密子集. 若对于每一个 $x\in A$ 有 $f(x)\leqslant g(x)$，则对每一个 $x\in X$ 也有 $f(x)\leqslant g(x)$.

4. 举例说明，在连续映射下开集的象不一定是开集.

5. 设 f 是度量空间 X 到度量空间 Y 上的等距映射，则 f 与 f^{-1} 都是连续映射.

6. 设 X 是度量空间，映射 $f:X\to\mathbf{R}$. 证明 f 是连续映射的充分必要条件是，对每一个实数 c，集合

$$\{x\in X\mid f(x)<c\}\text{和}\{x\in X\mid f(x)>c\}$$

都是 X 中的开集.

7. 设 f 是度量空间 X 到度量空间 Y 中的连续映射. 证明：若 A 在 X 中稠密，则 $f(A)$ 在 $f(X)$ 中稠密.

8. 设 (X,d) 是度量空间，$A\subset X$. 对每一个 $x\in X$ 定义

$$f(x)=\inf_{y\in A}d(x,y).$$

证明 f 是 X 到 $\mathbf{R}$ 的连续映射.

9. 设 F_1 和 F_2 是度量空间 X 中不相交的闭集. 证明存在不相交的开集 G_1 和 G_2，使得 $F_1\subset G_1, F_2\subset G_2$.

§ 5 完备的度量空间

我们知道，在数直线 $\mathbf{R}$ 中要判定一个数列 $\{x_n\}$ 是否收敛，我们可以应用 Cauchy 收敛准则：若对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(=N(\varepsilon))$，使得对一切 $m,n>N$ 都有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

则数列 $\{x_n\}$ 在 $\mathbf{R}$ 中收敛，即存在 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x_n\to x$. 满足 Cauchy 收敛准则条件的序列 $\{x_n\}$ 称为 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 序列. 因此，在数直线 $\mathbf{R}$ 中 Cauchy 收敛准则可简洁地叙述为：$\mathbf{R}$ 中每一个 Cauchy 序列都收敛. 在实数理论的研究中，证明了一系列与 Cauchy 收敛

准则等价的论断．由于篇幅所限，在这里我们略去这些证明，仅列出下列一些等价的论断：

1. 每一个有上界的非空实数集有上确界，或每一个有下界的非空实数集有下确界．

2. 每一个有上界的单调增加数列是收敛的，或每一个有下界的单调减少数列是收敛的．

3. (区间套定理)若闭区间列 $I_n=[a_n,b_n]$($n\in\mathbf{N}$) 满足条件：$I_{n+1}\subset I_n$ 且 $b_n-a_n\to 0\ (n\to\infty)$，则必存在实数 a，使得 $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n=\{a\}$．

4. 任何有界无限点集必有聚点．

5. 任何有界数列必有收敛的子数列．

6. (Cauchy 收敛准则)$\mathbf{R}$ 中每一个 Cauchy 序列都收敛．

7. (Heine-Borel 覆盖定理) 若 $\mathfrak{M}$ 是任意的由开区间组成的集族，$\mathfrak{M}$ 覆盖闭区间$[a,b]$，则存在$\mathfrak{M}$的有限子族 $\mathfrak{M}_0$，使得 $\mathfrak{M}_0$ 覆盖$[a,b]$．

上述各条皆称为实数的完备性公理．实数的完备性公理对于实数理论的发展起了重要的作用．这些公理有助于我们理解实数的本质．本节将推广实数的完备性概念到一般的度量空间上去．在上述实数的完备性公理中，由于 Cauchy 收敛准则涉及两点距离的概念，因此我们可以自然地将 Cauchy 序列的概念推广到一般的度量空间中，给出如下的定义．

定义 5.1 设$\{x_n\}$是度量空间(X,d) 中的序列．若对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(=N(\varepsilon))$，使得对一切 $m,n>N$，有

$$d(x_m,x_n)<\varepsilon,$$

则序列$\{x_n\}$称为X中的 Cauchy 序列(Cauchy sequence)，或基本序列(fundamental sequence)．

Cauchy 序列具有如下常用的性质．

引理 5.2 设$\{x_n\}$是度量空间 X 中的序列.

(1) 若$\{x_n\}$是收敛序列，则$\{x_n\}$是 Cauchy 序列. 但是，逆命题不成立.

(2) 若 Cauchy 序列$\{x_n\}$有一个子序列$\{x_{n_k}\}$收敛于x，则序列$\{x_n\}$也收敛于 x.

证明 (1) 设$\{x_n\}$收敛于 x，则对任意 $\varepsilon>0$，存在正整数 N 使得对一切 $m,n>N$ 有 $d(x_m,x)<\frac{\varepsilon}{2}$, $d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$d(x_m,x_n)\leqslant d(x_m,x)+d(x_n,x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此，$\{x_n\}$是 Cauchy 序列.

举一例说明逆命题不成立. 例如，设 X 为开区间$(0,1)$，任意两点 x，y 的距离定义为 $d(x,y)=|x-y|$. 考察 X 中的序列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，由于

$$d\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|\leqslant\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\to 0\quad(m,n\to\infty),$$

因此$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是 X 中的 Cauchy 序列. 但是，序列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 在 X 中没有极限，即$\left\{\frac{1}{n}\right\}$在 X 中不收敛.

(2) 设$\{x_n\}$是 Cauchy 序列，$\{x_n\}$ 有一个收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$并设 $x_{n_k}\to x(k\to\infty)$. 对任意 $\varepsilon>0$，由于 $x_{n_k}\to x$，则存在正整数 N_1，使得对一切 $n_k>N_1$有 $d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}$；由于$\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列，则存在正整数 N_2，使得对一切 $m,n>N_2$ 有 $d(x_m,x_n)<\frac{\varepsilon}{2}$. 令 $N=\max(N_1,N_2)$，则对一切 $n>N$ 及任取的一个 $n_k>N$，有

$$d(x_n,x)\leqslant d(x_n,x_{n_k})+d(x_{n_k},x)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

因此，$x_n \to x(n\to\infty)$. □

定义 5.3 在度量空间 X 中，若每一个 Cauchy 序列都收敛，则称 X 是完备的(complete).

由 Cauchy 收敛准则知，数直线 $\mathbf{R}$ 按通常定义的距离是一个完备空间，但数直线上所有有理点组成的集 $\mathbf{Q}$ 作为 $\mathbf{R}$ 的子空间是不完备的.

如果已知一个度量空间的完备性，要讨论它的子空间的完备性的时候，常常用到下面的定理.

定理 5.4 设 X 是完备的度量空间，$A\subset X$，则 X 的子空间 A 是完备的，当且仅当集 A 是 X 中的闭集.

证明 "$\Rightarrow$"设 X 的子空间 A 是完备的. 要证明 A 是闭集，由定理 2.11(2)，只要证明 $\bar{A}\subset A$. 任取 $x\in\bar{A}$，由定理 4.3(1)，存在 A 中的序列 $\{x_n\}$，使得 $x_n\to x$. 由引理 5.2(1)，$\{x_n\}$ 是 A 中的 Cauchy 序列. 由于 A 是完备的，因而 $x\in A$.

"$\Leftarrow$"设 A 是 X 中的闭集，$\{x_n\}$ 是 A 中任意一个 Cauchy 序列. 由假设 X 是完备的，并且$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列，则 $x_n\to x\in X$. 再应用定理 4.3(2)，得到 $x_n\to x\in A$. 因此，子空间 A 是完备的. □

下面，我们讨论一些具体的例子. 按照定义，要证明一个度量空间X 是完备的，我们取 X 中任意一个 Cauchy 序列$\{x_n\}$，先利用 x_n 的性质确定一个 x.（例如在下面多数的例子中，令 x 为 $\{x_n\}$ 按坐标收敛的极限.）然后证明 x 是空间 X 中的一点并且在空间 X 的度量下 $x_n\to x$.

例 1 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 按通常定义的度量是完备的.

证明 $\mathbf{R}^n$ 的度量按通常的定义为

$$d(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

其中 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)$. 设$\{x_k\}$是 $\mathbf{R}^n$ 中任意 Cauchy 序列, $x_k=(\xi_1^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)})$. 于是对于任意 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 使得当 $k,m>N$ 时,

$$d(x_k,x_m)=\left(\sum_{i=1}^{n}(\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)})^2\right)^{\frac{1}{2}}<\varepsilon. \tag{5.1}$$

从而, 对每一个 $i(i=1,\cdots,n)$有$(\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)})^2<\varepsilon^2$, 或

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon.$$

这表明, 对每一个 $i(i=1,\cdots,n)$, $\{\xi_i^{(k)}\}$是 $\mathbf{R}$ 中的 Cauchy 序列. 由 $\mathbf{R}$ 的完备性, 可设当 $k\to\infty$ 时

$$\xi_i^{(k)}\to\xi_i \quad (i=1,\cdots,n).$$

令 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, 则 $x\in\mathbf{R}^n$, 并且由(5.1)式, 令 $m\to\infty$ 得到

$$d(x_k,x)\leqslant\varepsilon,$$

即 $x_k\to x(k\to\infty)$. 所以 $\mathbf{R}^n$ 是完备的.

将 $\mathbf{C}^n$ 中的每一个元素的坐标分为实部和虚部, 可以用上述证明相同的方法证明 $\mathbf{C}^n$ 的完备性.

例 2 离散的度量空间是完备的.

证明 离散的度量空间 X 的度量定义为

$$d(x,y)=\begin{cases}0, 若x=y,\\ 1, 若x\neq y.\end{cases}$$

设$\{x_n\}$是 X 中任意的 Cauchy 序列, 取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 则存在正整数N使得一切的 $n>N$, 有 $d(x_n,x_N)<\frac{1}{2}$. 由 d 的定义, 这意味着$d(x_n,x_N)=0$. 因而, 对一切的$n>N$ 都有 $x_n=x_N$. 当然有$x_n\to x_N\in X$.

例 3 l^p 空间$(1\leqslant p<\infty)$ 按通常定义的度量(见 §1 例 7) 是完备的.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 l^p 中任意的 Cauchy 序列, $x_n=(\xi_1^{(n)},$

$\xi_2^{(n)},\cdots)$. 于是,对于任意$\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 $m,n>N$,有

$$(5.2)\qquad d(x_m,x_n)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\varepsilon.$$

从而,对每一个 $i\in\mathbf{N}$ 有

$$|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|<\varepsilon.$$

这表明,对每一个 $i\in\mathbf{N}$, $\{\xi_i^{(n)}\}$是 $\mathbf{R}$ 中(或 $\mathbf{C}$ 中)的 Cauchy 序列. 由于 $\mathbf{R}$(或$\mathbf{C}$)的完备性,可设当 $n\to\infty$ 时

$$\xi_i^{(n)}\to\xi_i\quad(i\in\mathbf{N}).$$

令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$. 现在证明 $x\in l^p$ 且 $x_n\to x$. 事实上,由(5.2)式对一切 $m,n>N$ 和 $k\in\mathbf{N}$ 有

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i^{(m)}-\xi_i^{(n)}|^p<\varepsilon^p.$$

令 $m\to\infty$,我们得到,对一切 $n>N$ 和 $k\in\mathbf{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k}|\xi_i-\xi_i^{(n)}|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

因此,令 $k\to\infty$,我们得到,对一切 $n>N$,

$$(5.3)\qquad \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\xi_i^{(n)}|^p\leqslant\varepsilon^p.$$

这表明 $x-x_n=(\xi_1-\xi_1^{(n)},\xi_2-\xi_2^{(n)},\cdots)\in l^p$. 又因 $x_n\in l^p$, 所以 $x=x_n+(x-x_n)\in l^p$. 同时,(5.3)也表明 $x_n\to x$.

例 4 $C[a,b]$空间按通常定义的度量(见§1 例 4)是完备的.

证明 设$\{x_n\}$是 $C[a,b]$中任意的Cauchy 序列,则对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得一切 $m,n>N$,有

$$(5.4)\qquad d(x_m,x_n)=\max_{t\in[a,b]}|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon.$$

从而,对每一点 $t\in[a,b]$有

(5.5) $$|x_m(t)-x_n(t)|<\varepsilon \quad (m,n>N).$$
这表明，对每一点 $t\in[a,b]$，$\{x_n(t)\}$是 R(或 C) 中的 Cauchy 序列. 由于R(或C)的完备性，可设当 $n\to\infty$ 时
$$x_n(t)\to x(t).$$
于是，当 t 在$[a,b]$ 上变动时，就得到一个定义在$[a,b]$上的函数 $x(t)$. 现在证明 $x\in C[a,b]$且 $x_n\to x$. 事实上，在(5.5)式中，令 $m\to\infty$ 得到

(5.6) $$|x(t)-x_n(t)|\leqslant\varepsilon \quad (n>N, t\in[a,b]).$$
因此，$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$，并且 $x(t)$是$[a,b]$上的连续函数. 由 § 4 例 1 的结论知 $x_n\to x$.

例 5 我们给出下列结论

(1) l^∞空间按通常定义的度量(见 § 1 例 5)是完备的.

(2) c 空间. c 是收敛的实数(或复数)列的全体组成的集合，即 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c\Longleftrightarrow$数列$\{\xi_i\}$ 是收敛的. c 中任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)$的距离定义为

(5.7) $$d(x,y)=\sup_{i\in N}|\xi_i-\eta_i|.$$
因此，c 可以看作为 l^∞ 的子空间. c 是完备的.

(3) c_0 空间. c_0 是收敛于零的实数(或复数) 列的全体组成的集合，即 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c_0\Longleftrightarrow\lim\limits_{i\to\infty}\xi_i=0$. 按(5.7)定义的度量 c_0 是完备的. c_0 可以看作为 c 的子空间，从而也可以看作为 l^∞的子空间.

下面，我们给出两个不完备的度量空间的例子.

例 6 在 $C[0,1]$上定义度量为
$$d_1(x,y)=\int_0^1|x(t)-y(t)|dt \qquad (x,y\in C[0,1]),$$
则$(C[0,1],d_1)$是不完备的.

证明 定义$[0,1]$上的函数

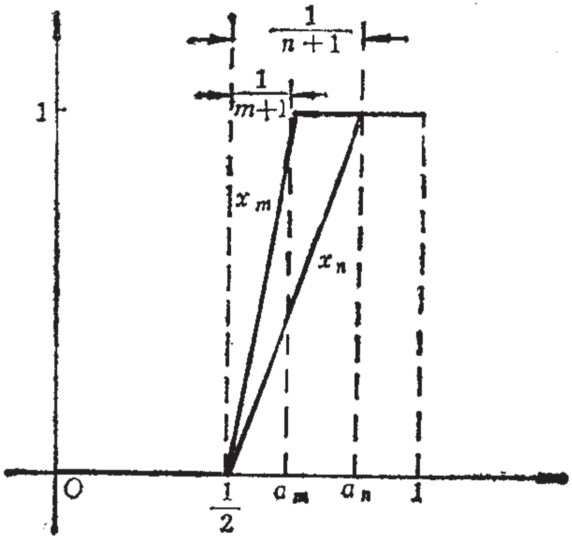


图 5.1

$$x_n(t)=\begin{cases}0, & 若\ t\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ (n+1)t-\frac{n+1}{2}, & 若\ t\in\left[\frac{1}{2},a_n\right],\\ 1, & 若\ t\in[a_n,1]\ \left(这里\ a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\right).\end{cases}$$

从图5.1中可以看出，每一个$x_n\in C[0,1]$并且$d_1(x_m,x_n)$等于图中三角形的面积，当$m,n>\frac{1}{\varepsilon}$时

$$d_1(x_m,x_n)<\varepsilon.$$

因此，$\{x_n\}$是$(C[0,1],d_1)$中的 Cauchy 序列.

我们证明$\{x_n\}$不收敛，从而$(C[0,1],d_1)$是不完备的. 事实上，假若 $x_n\to x\in C[0,1]$，则

$$d(x_n,x)=\int_0^1|x_n(t)-x(t)|dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}|x(t)|dt+\int_{\frac{1}{2}}^{a_n}|x_n(t)-x(t)|dt+\int_{a_n}^1|1-x(t)|dt.$$

趋于 0(当 $n\to\infty$时). 由于上式最后的三个积分都是非负的，则这

三个积分都趋于0(当 $n\to\infty$时). 因此得到

$$x(t)=\begin{cases}0, 若 t\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\ 1, 若 t\in\left(\frac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

此与 $x(t)$在$[0,1]$上连续相矛盾. 故$\{x_n\}$不收敛.

例 7 设 $P[a,b]$为$[a,b]$上的多项式的全体，其度量定义为

$$d(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)| \quad (x,y\in P[a,b]).$$

$P[a,b]$可以看作为 $C[a,b]$的子空间: $P[a,b]$是不完备的. 事实上，因为 $e^t=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{t^i}{i!}$, 令 $x_n(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{t^i}{i!}$, $x(t)=e^t$, 则$\{x_n\}$是 $P[a,b]$中的序列，在 $C[a,b]$中 $x_n\to x\notin P[a,b]$. 这表明 $P[a,b]$在完备空间 $C[a,b]$中不是闭集. 由定理 5.4，得到 $P[a,b]$是不完备的.

最后，我们考虑度量空间的完备化问题. 正如数直线 $\mathbf{R}$ 与 $\mathbf{R}$ 中的有理点的全体 $\mathbf{Q}$ 的关系一样，$\mathbf{Q}$ 是不完备的. 但是在补充了一些新的点(即全体无理点)后，得到一个完备的空间 $\mathbf{R}$ 并且 $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密. 在实数理论中，我们称 $\mathbf{R}$ 为 $\mathbf{Q}$ 的完备化. 我们可以把这一问题推广到一般的度量空间中，得到度量空间完备化的定理，从而解决每一个不完备的度量空间完备化的问题.

定理 5.5 对于度量空间 (X,d)，存在一个完备的度量空间 $(\hat{X},\hat{d})$，$(\hat{X},\hat{d})$有一个子空间W，使得(1) W与 X 是等距的；(2) W在 $\hat{X}$中稠密. 这个度量空间$(\hat{X},\hat{d})$称为(X,d)的完备化(completion)或完备化空间. 在等距的意义下，完备化空间$(\hat{X},\hat{d})$是唯一的，即若 $\tilde{X}$ 是任何一个完备的度量空间，$\tilde{X}$ 有一个子空间$\widetilde{W}$满足上述条件(1) 与(2)，则 $\hat{X}$ 与$\tilde{X}$ 是等距的.

由于此定理的证明太长，详细地证明略去. 在这里我们把定理证明的思路介绍如下.

我们考虑 X 中所有 Cauchy 序列的全体. 对于 Cauchy 序列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$, 若

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0,$$

则称 $\{x_n\}$ 等价于 $\{y_n\}$. 这样, 在 X 中所有 Cauchy 序列之中建立了一个等价关系. 按此等价关系, 我们把等价的两个 Cauchy 序列归为同一类(等价类), 不等价的两个 Cauchy 序列归为不同的类, 我们记这些类为 $\hat{x}, \hat{y}, \cdots$. 所有这些类的全体组成一个新的空间 $\hat{X}$. 对每一个 $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}$, 定义

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n),$$

这里 $\{x_n\} \in \hat{x}$, $\{y_n\} \in \hat{y}$. 可以证明上述极限是确定的、不依赖于 $\hat{x}$ 中和 $\hat{y}$ 中 Cauchy 序列的选取方式. 易见 $(\hat{X}, \hat{d})$ 是度量空间.

对于 $b \in X$, 常数列 $\{b, b, \cdots\}$ 是 Cauchy 序列, 包含此 Cauchy 序列的类记为 $\hat{b}$. 令 $W = \{\hat{b} \mid b \in X\}$. 定义映射 $T: X \to W \subset \hat{X}$ 使得

$$Tb = \hat{b} \quad (b \in X).$$

可以证明(详细证明略):

a. T 是 X 到 W 上的等距映射, $\overline{W} = \hat{X}$.

b. $(\hat{X}, \hat{d})$ 是完备的. 于是 $(\hat{X}, \hat{d})$ 是 (X, d) 的完备化.

c. 在等距的意义下, 完备化空间 $(\hat{X}, \hat{d})$ 是唯一的.

对于前面所讨论过的例子, 我们指出下面的事实. 由例 4, $C[a,b]$ 是完备的, 而例 7 中的 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 中稠密, 所以 $P[a,b]$ 的完备化是 $C[a,b]$.

类似于数直线上的闭区间套定理, 在完备的度量空间中有下面的闭球套定理.

定理 5.6(闭球套定理) 设 (X,d) 是完备的度量空间, $\bar{B}_n = \bar{B}_n(x_n, r_n)$ $(n \in \mathbf{N})$ 是 X 中的一列闭球. 若

$$\bar{B}_1 \supset \bar{B}_2 \supset \cdots \supset \bar{B}_n \supset \cdots \quad 且\ r_n \to 0,$$

则在 X 中存在唯一的一点 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n$.

证明 由这一列闭球的球心组成的序列 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 事实上,若 $n>m$, 则 $\tilde{B}_n\subset\tilde{B}_m$, 从而 $x_n\in\tilde{B}_m$. 因此

$$d(x_n,x_m)\leqslant r_m\to 0\quad(m\to\infty). \tag{5.8}$$

由 X 的完备性,存在 $x\in X$, 使得 $x_n\to x$. 对于任意 $m\in\mathbb{N}$,在(5.8)中令 $n\to\infty$,由度量的连续性(引理 4.2(3)),得到

$$d(x,x_m)\leqslant r_m.$$

因此,对于任意 $m\in\mathbb{N}$ 有 $x\in\tilde{B}_m$,即 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n$.

若 X 中又有 $y\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\tilde{B}_n$, 则对任意 $n\in\mathbb{N}$ 有 $y\in\tilde{B}_n$, 从而, $d(y,x_n)\leqslant r_n$. 令 $n\to\infty$,得到 $d(y,x)=0$,故 $x=y$. 唯一性得证. □

习 题

1. 证明度量空间中的任一 Cauchy 序列的点构成的集合是有界集.

2. 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 都是度量空间 (X,d) 中的 Cauchy 序列, 则数列 $\{d(x_n,y_n)\}$ 收敛.

3. 设度量空间 X_1 和 X_2 是等距的, 且 X_1 是完备的, 证明 X_2 也是完备的.

4. 设度量空间 (X,d) 是完备的, 令 $\tilde{d}=\dfrac{d}{1+d}$, 证明度量空间 $(X,\tilde{d})$ 也是完备的.

5. 证明 l^{∞} 按 §1 例 5 定义的度量它是完备的.

6. 证明: (1) 空间 c, c_0 (见例 5) 是 l^{∞} 的子空间; (2) 空间 c, c_0 是完备的.

7. 证明 $(\mathbb{R}^n,d_{\infty})$ 是完备的, 这里 d_{∞} 定义为

$$d_{\infty}(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|,$$

$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbb{R}^n$.

8. 设X是完备的度量空间,$\{F_n\}$是X中的一列非空闭集满足:

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}\delta(F_n)=0$(这里$\delta(F_n)$是$F_n$的直径). 证明在$X$中存在唯一一点$x_0$,使得$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\{x_0\}$.

§6 第一纲集和第二纲集

纲的概念和Baire的纲定理在泛函分析中有着广泛的应用. 主要表现在应用纲定理的独特方法,成功地完成了一些定理的证明.

定义 6.1 设X是度量空间,$A\subset X$.

(1) 若$(\bar{A})^\circ=\varnothing$,则称$A$在$X$中是无处稠密的(nowhere dense). 或称A为疏朗集(meager set).

(2) 若A是至多可数个无处稠密集之并,则称A为第一纲集(first category set).

(3) 若A不是第一纲集,则称A为第二纲集(second category set).

由定义可知,无处稠密集A的闭包$\bar{A}$没有内点,因此$\bar{A}$不包含任何非空开集. 无处稠密集的子集仍是无处稠密的. 第一纲集具有如下明显的性质:

(i) 第一纲集的子集仍是第一纲集.

(ii) 至多可数个第一纲集的并也是第一纲集.

例 1 在二维欧氏空间中(平面上)位于直线上的任何点集都可以作为无处稠密集的例子.

例 2 在二维欧氏空间中,两个坐标都是有理数的点集是第一纲集,它是可数个单点集之并,这个集合是第一纲的,但是它在

$\mathbf{R}^2$ 中稠密.

例 3 Cantor 集是无处稠密集.

下面,我们给出并证明 Baire 的纲定理.

定理 6.2(Baire 定理) 完备的度量空间 X 必是第二纲集.

证明 采用反证法. 假若完备的度量空间 X 是第一纲集. 可设 $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n$,其中每一个 M_n 都是无处稠密集,从而每一个 $\overline{M}_n$ 都不包含非空开集. 取 $a_0\in X$, 因 $\overline{M}_1$ 不包含 $B(a_0,1)$, 即 $\overline{M}_1^c\cap B(a_0,1)$ 是非空开集, 故我们可选取其中一元 a_1 以及 $r_1>0$(不妨设 $r_1<1$),使得

$$\tilde{B}\left(a_1,\frac{1}{2}r_1\right)\subset B(a_1,r_1)\subset\overline{M}_1^c\cap B(a_0,1).$$

因 $\overline{M}_2$ 不包含 $\tilde{B}\left(a_1,\frac{1}{2}r_1\right)$, 即 $\overline{M}_2^c\cap B\left(a_1,\frac{1}{2}r_1\right)$ 是非空开集, 故我们可选取其中一元 a_2 以及 $r_2>0\left(不妨设 r_2<\frac{1}{2}r_1\right)$,使得

$$\tilde{B}\left(a_2,\frac{1}{2}r_2\right)\subset B(a_2,r_2)\subset\overline{M}_2^c\cap B\left(a_1,\frac{1}{2}r_1\right).$$

如此继续下去,对任意的 $n\in\mathbf{N}$, 存在 $a_n\in\overline{M}_n^c\cap B\left(a_{n-1},\frac{1}{2}r_{n-1}\right)$ 以及 $0<r_n<\frac{1}{2}r_{n-1}$,使得

$$\tilde{B}\left(a_n,\frac{1}{2}r_n\right)\subset B(a_n,r_n)\subset\overline{M}_n^c\cap B\left(a_{n-1},\frac{1}{2}r_{n-1}\right).\tag{6.1}$$

这样,我们得到了一列闭球 $\{\tilde{B}(a_n,r_n)\}$,满足

$$\tilde{B}\left(a_1,\frac{1}{2}r_1\right)\supset\tilde{B}\left(a_2,\frac{1}{2}r_2\right)\supset\cdots\supset\tilde{B}\left(a_n,\frac{1}{2}r_n\right)\supset\cdots,$$

并且闭球 $\tilde{B}\left(a_n,\frac{1}{2}r_n\right)$ 的半径

$$\frac{1}{2}r_n<\frac{1}{2^2}r_{n-1}<\cdots<\frac{1}{2^n}r_1<\frac{1}{2^n}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

由于X是完备的，应用闭球套定理(定理 5.6)，存在唯一的 $a\in X$，使得

$$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\widetilde{B}\left(a_n,\frac{1}{2}r_n\right).$$

由(6.1)，则有

$$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{M}_n^c\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}M_n^c=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}M_n\right)^{\circ}=\varnothing.$$

得到矛盾．所以完备的度量空间X是第二纲集．□

由 Baire 纲定理还可以得到下面的定理．

定理 6.3 设X是完备的度量空间．$\{A_k\}$是X中的一列闭集．若

$$X=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,$$

则至少有一个A_k包含一个X的非空开子集．

证明 假若对于每一个$k\in\mathbb{N}$，A_k不含非空开集，则

$$(\overline{A}_k)^{\circ}=A_k^{\circ}=\varnothing,$$

即A_k是无处稠密集．故X是第一纲集．此与定理 6.2 的结论矛盾．因此，至少有一个A_k包含一个X的非空开子集．□

闭区间[0,1]是完备空间$\mathbf{R}$的闭子集，因而是一个完备子空间．所以据 Baire 定理知，[0,1]不可能是任何无处稠密集的可数并．可以证明：在完备的度量空间中每个非空开集都是第二纲集(见习题 6)．

习　题

1. 设 A 是度量空间 X 中的无处稠密集. 证明 A 的余集 A^c 在 X 中稠密. 其逆命题是否成立?

2. 设 X 是度量空间, $A\subset X$. 证明 A 是无处稠密集当且仅当 $\bar{A}$ 不包含任何非空开集.

3. 证明整数集 $\mathbf{Z}$ 是 $\mathbf{R}$ 中的第一纲集, 但是 $\mathbf{Z}$ 作为子空间 $\mathbf{Z}$ 中的集是第二纲集.

4. 设 X 为一完备度量空间. 证明 X 中的任意一列稠密开集的交集是稠密的.

5. 有限个无处稠密集之并是无处稠密集.

*6. 设 X 为一度量空间. 如果其中任何一列稠密开集之交是稠密的, 则称 X 为 Baire 空间. 由习题 4 知, 完备度量空间是 Baire 空间. 试证明以下各条彼此等价:

(a) X 是 Baire 空间.

(b) X 中任何一列无处稠密的闭集之并都没有内点.

(c) 设 A_n 是 X 中的闭集 ($n\in\mathbf{N}$), 若 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 具有内点, 则必有某个 A_n 具有内点.

(d) 若 X 的子集 A 是第一纲集, 则 A 的余集 A^c 在 X 中稠密.

(e) 每一个非空开集是第二纲集.

§7　Banach 压缩映射定理及其应用

设 T 是集 X 到 X 的映射. 若存在 $x\in X$, 使得 $Tx=x$, 则此点 x 称为映射 T 的不动点(fixed point).

下面我们考察几个从 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^2$ 到其自身的映射. 例如, 对于一个不等于零的实数 α, 定义平移映射 T_α: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为

$$T_\alpha x=x+\alpha\quad(\alpha\in\mathbf{R}),$$

则 T_α 没有不动点.

设 T_0: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ 是以 0 为中心的旋转映射，则T_0有唯一的不动点，就是旋转中心 0.

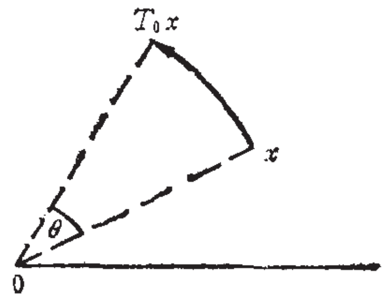


图 7.1

定义映射 T: $\mathrm{R} \to \mathrm{R}$ 为 $Tx = x^2$ $(x \in \mathrm{R})$，则 T 有两个不动点 0和 1.

投影映射 P_1: $\mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$ 定义为，对每一个 $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathrm{R}^2$,

$$P_1 x = (\xi_1, 0),$$

则 P_1 有无限多个不动点.

我们所关心的问题是，映射 T: $X \to X$ 在什么条件下存在唯一的不动点. 在本节，我们将指出：完备的度量空间X到其自身的某一类映射(称为压缩映射）存在唯一的不动点. 这就是 Banach 压缩映射定理，又称为 Banach 不动点定理(见定理 7.2). 在该定理的证明中，具体地给出了如何求得不动点的方法，即迭代法. 这一定理的结论及其证明中的迭代方法在数学的很多领域中，如代数方程、常微分方程、积分方程、偏微分方程等方面，具有广泛的应用.

定义 7.1 设(X, d)是度量空间，映射 T: $X \to X$. 若存在一个常数 α, $0 \leqslant \alpha < 1$，使得对一切 $x, y \in X$，有

$$d(Tx, Ty) \leqslant \alpha d(x, y),$$

则映射T称为X上的压缩映射(contraction).

在压缩映射T的作用下，任意两点 x 与 y 的象的距离比 x 与 y 的距离更近，其比值 $d(Tx, Ty)/d(x, y)$ 不超过常数 $\alpha (0 \leqslant \alpha < 1)$.

显然，压缩映射 T: $X \to X$ 是连续映射. 事实上，对于任意 $x \in X$ 和任意序列 $x_n \to x$，有

$$d(Tx_n, Tx) \leqslant \alpha d(x_n, x) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 $Tx_n \to Tx$. 据定理 4.5，T 在点 x 连续. 由 x 的任意性，则T在

X 上连续.

定理 7.2(Banach 压缩映射定理) 设(X,d)是完备的度量空间,$T:X\to X$ 是压缩映射,则T有唯一的不动点,即存在唯一的 $x\in X$,使得 $Tx=x$.

证明 存在性. 任取 $x_0\in X$, 我们采用如下迭代法构造一个序列$\{x_n\}$,令

$$x_1=Tx_0, x_2=Tx_1, \cdots, x_{n+1}=Tx_n, \cdots. \tag{7.1}$$

由假设 T: $X\to X$ 是压缩映射,则存在α, $0\leqslant\alpha<1$,使得

$$d(Tx,Ty)\leqslant\alpha d(x,y) \quad (x,y\in X).$$

现在我们证明$\{x_n\}$是 Cauchy 序列. 由于

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n)&=d(Tx_n,Tx_{n-1})\leqslant\alpha d(x_n,x_{n-1}) \\ &=\alpha d(Tx_{n-1},Tx_{n-2})\leqslant\alpha^2 d(x_{n-1},x_{n-2}) \\ &=\cdots\leqslant\alpha^n d(x_1,x_0), \end{aligned} \tag{7.2}$$

对于任意的正整数 $m,n(m>n)$,由三角不等式及(7.2)式得

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m)&\leqslant d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots+d(x_{m-1},x_m) \\ &\leqslant(\alpha^n+\alpha^{n+1}+\cdots+\alpha^{m-1})d(x_1,x_0) \\ &=\alpha^n\frac{1-\alpha^{m-n}}{1-\alpha}d(x_1,x_0) \\ &\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\,. \end{aligned} \tag{7.3}$$

由于 $0\leqslant\alpha<1$,上式最后一项当 n 充分大时可以小于任意的 $\varepsilon>0$,从而 $d(x_n,x_m)$当 n 充分大时(且 $m>n$)可小于任意的 $\varepsilon>0$.这就证明了$\{x_n\}$是 Cauchy 序列.

由假设,X 是完备的, 则可设 $x_n\to x\in X$. 现在我们证明序列$\{x_n\}$的极限 x 就是T的不动点. 因为由三角不等式和迭代过程(7.1),

$$\begin{aligned} d(x,Tx)&\leqslant d(x,x_n)+d(x_n,Tx) \\ &=d(x,x_n)+d(Tx_{n-1},Tx) \end{aligned}$$

$$\leqslant d(x,x_n)+\alpha d(x_{n-1},x)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

所以 $d(x,Tx)=0$，从而 $Tx=x$。

唯一性．若 $Tx=x$ 且 $Tx_1=x_1$，则

$$0\leqslant d(x,x_1)=d(Tx,Tx_1)\leqslant \alpha d(x,x_1).$$

于是由于 $1-\alpha>0$ 以及

$$0\leqslant (1-\alpha)d(x,x_1)\leqslant 0,$$

则 $d(x,x_1)=0$，从而 $x=x_1$． □

值得注意，定理中 X 的完备性及 T 为压缩映射的条件都是十分必要的．例如，数直线 $\mathbb{R}$ 中的开区间 $(0,1)$，按两点的绝对值定义的距离，是不完备的．若映射 $T:(0,1)\to(0,1)$ 定义为 $Tx=\frac{1}{2}x$ $(x\in(0,1))$，则 T 是压缩映射，但是 T 没有不动点．

Banach 压缩映射定理有下列推论．

推论 7.3 在定理 7.2 的条件下，从任意 $x_0\in X$ 出发得到的迭代序列 $\{x_n\}$（即 $x_n=Tx_{n-1}$，$n\in\mathbb{N}$）收敛于 T 的唯一的不动点 x，并且有误差估计式

$$d(x_n,x)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0)\,. \tag{7.4}$$

证明 由定理 7.2 的证明知 $\{x_n\}$ 收敛于 T 的唯一的不动点 x，并且在 (7.3) 中令 $m\to\infty$，则误差估计式 (7.4) 成立． □

为了下面叙述方便，对于映射 $T:X\to X$，定义 $T^2=T\circ T$（即 T 与 T 的复合映射），$T^3=T\circ T\circ T$，…．可见，对于任一正整数 n，T^n 也是 X 到 X 的映射．

推论 7.4 设 (X,d) 是完备的度量空间，$T:X\to X$．若 $T^n:X\to X$ 是压缩映射，则 T 有唯一的不动点 $x\in X$．

证明 由定理 7.2，存在唯一的 $x\in X$，使得 $T^nx=x$．现在证明此点 x 是映射 T 的唯一的不动点．由于

$$T^n(Tx)=T^{n+1}x=T(T^nx)=Tx,$$

故 Tx 也是 T^n 的不动点. 于是由 T^n 的不动点的唯一性, 得到 $Tx=x$. 又若 x_1 也是 T 的不动点, 即 $Tx_1=x_1$, 则

$$T^n x_1 = T^{n-1}(Tx_1) = T^{n-1}x_1 = T^{n-2}(Tx_1) = T^{n-2}x_1 = \cdots = x_1.$$

这说明 x_1 是 T^n 的不动点. 再由 T^n 的不动点的唯一性得到 $x_1=x$. □

推论 7.5 设 (X,d) 是完备的度量空间, $T: X\to X$ 在 $Y=\overline{B(x_0,r)}$ 上是压缩映射, 并且满足

$$d(x_0,Tx_0)<(1-\alpha)r, \tag{7.5}$$

其中 α 是压缩映射 T 决定的常数, 则 T 在 Y 中存在唯一的不动点.

证明 按照定理 7.2 的证明中的(7.1)作一个从 x_0 出发的迭代序列 $\{x_n\}$. 我们证明所有的 x_n 和 $\{x_n\}$ 的极限 x 都在 Y 中. 事实上, 可以证明 $T(Y)\subset B(x_0,r)\subset Y$, 因为对任意的 $x\in Y$, 由于

$$d(x_0,Tx)\leqslant d(x_0,Tx_0)+d(Tx_0,Tx) < (1-\alpha)r+\alpha d(x_0,x)\leqslant(1-\alpha)r+\alpha r=r,$$

故 $Tx\in B(x_0,r)\subset Y$. 于是我们得到 $x_n\in B(x_0,r)\subset Y\ (n\in\mathrm{N})$, 并且由定理 4.3(1)知, $x_n\to x\in\overline{B(x_0,r)}=Y$.

于是仿照定理 7.2 的证明步骤可完成此推论的证明. □

下面, 我们举几个例子来说明 Banach 压缩映射定理在几个不同领域中的应用.

例 1 求线性方程组的解的问题. 设以 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为变量的线性方程组

$$\begin{cases}\xi_1=a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2+\cdots+a_{1n}\xi_n+\beta_1,\\ \xi_2=a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2+\cdots+a_{2n}\xi_n+\beta_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \xi_n=a_{n1}\xi_1+a_{n2}\xi_2+\cdots+a_{nn}\xi_n+\beta_n.\end{cases} \tag{7.6}$$

若令

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix},$$

(A 可简记为 $A=(a_{ij})$)，则(7.6)可表示为简单的形式:

$$x=Ax+b. \tag{7.7}$$

我们把 x,b 等看作 $\mathbb{R}^n$ 中的元素，$\mathbb{R}^n$ 上的度量定义为

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i-\eta_i|,$$

这 里 $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}$ 和 $y=\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中任意的两点.

定义映射 $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 为

$$Tx=Ax+b \quad (x\in\mathbb{R}^n).$$

因此，映射 T 的不动点就是(7.7)的解．由于$(\mathbb{R}^n,d_\infty)$ 是完备的(见§5 习题 7)，我们只要讨论在什么条件下映射 T 是压缩映射.

对于任意的 $x,y\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}d_\infty(Tx,Ty)&=d_\infty(Ax+b,Ay+b)\\&=\max_{1\leq i\leq n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(\xi_j-\eta_j)\right|\\&\leq\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|\max_{1\leq j\leq n}|\xi_j-\eta_j|\\&=\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n|a_{ij}|d_\infty(x,y).\end{aligned}$$

可见 当 $\alpha=\max\limits_{1\leq i\leq n}\sum\limits_{j=1}^n|a_{ij}|<1$ 时，T 是压缩映射．从而，应用定理 7.2，T 在 $\mathbb{R}^n$ 中有唯一的不动点．因此，方程(7.7) 有唯一的解.

归纳上面的讨论，我们得到如下的结论.

定理 7.6 若含有 n 个变量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$（看作为 x 的分量）的线性方程组

$$x = Ax + b \tag{7.7}$$

的系数矩阵 $A=(a_{ij})$ 满足

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \leqslant \alpha < 1 \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

则方程组(7.7)有唯一的解 x. 并且解 x 是从任意一点 x_0 出发的迭代序列 $\{x_m\}$ 的极限，这里

$$x_{m+1} = Ax_m + b \quad (m=0,1,2,\cdots). \tag{7.8}$$

对于一般形式的 n 个变量 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 的方程组

$$Cx = d, \tag{7.9}$$

这 里 $x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}, d=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix},\ C=(c_{ij})=\begin{pmatrix}c_{11} & \cdots & c_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ c_{n1} & \cdots & c_{nn}\end{pmatrix}.$

行列式 $|C|\neq 0$. 若选取一个适当的非奇异的方阵 B，使得 $C=B-G$，从而(7.9)变为 $Bx=Gx+d$，或

$$x = B^{-1}Gx + B^{-1}d,$$

则方程组(7.9)化为方程组(7.7)的形式. 下面就可利用定理 7.6 作进一步的讨论.

例 2 一阶常微分方程的解的存在性与唯一性问题.

定理 7.7 对于一阶常微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x)\\ x(t_0) = x(0).\end{cases} \tag{7.10}$$

设 f 在矩形区域（如图7.2）

$$D = \{(t,x)\,|\,|t-t_0|\leqslant a,\ |x-x(0)|\leqslant b\}$$

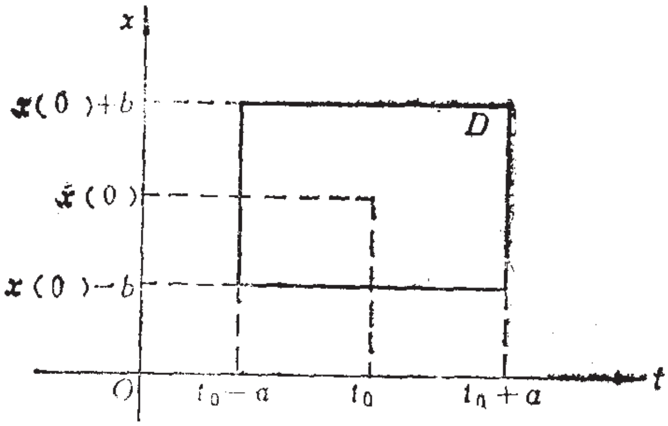


图 7.2

内连续(从而 f 在 D 上有界,可设 $\max\limits_{(t,x)\in D}|f(t,x)|\leqslant c$), 并且 f 在 D 上关于 x 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 k(称为 Lipschitz 常数),使得对任意的 $(t,x),(t,x_1)\in D$

$$|f(t,x)-f(t,x_1)|\leqslant k|x-x_1|,$$

则初值问题 (7.10) 有唯一的解 $x\in C[t_0-\beta,\ t_0+\beta]$, 这里 $\beta<\min\left\{a,\dfrac{b}{c},\dfrac{1}{k}\right\}$.

证明 容易验证初值问题(7.10)可以化为等价的积分方程

$$x(t)=x(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s, \tag{7.11}$$

也就是说, x 是初值问题(7.10)的解, 当且仅当 x 是积分方程(7.1)的解. 记 $J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$. 我们知道,度量空间 $(C(J),d)$ 是完备的,这里度量 d 的定义为

$$d(x,y)=\max_{t\in J}|x(t)-y(t)|.$$

令 $\tilde{C}=\{x\in C(J)\mid |x(t)-x(0)|\leqslant c\beta,\ t\in J\}$, 则 $\tilde{C}$ 是 $C(J)$ 闭子空间,从而 $\tilde{C}$ 是完备的(应用定理 5.4). 对于任意的 $x\in\tilde{C}$,定义映射 T 使得对任意的 $t\in J$

$$(Tx)(t)=x(0)+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s. \tag{7.12}$$

由于 $c\beta<b$，对任意 $s\in J$ 以及 $x\in\tilde{C}$，有 $(s,x(s))\in D$. 我们得到

$$|(Tx)(t)-x(0)|=\left|\int_{t_0}^{t} f(s,\ x(s))\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant c|t-t_0|\leqslant c\beta \quad (t\in J),$$

因此，映射 T 是从 $\tilde{C}$ 到 $\tilde{C}$ 的映射.

现在证明，T 在 $\tilde{C}$ 上是压缩映射. 事实上，对于任意的 $x,y\in\tilde{C}$，应用 Lipschitz 条件

$$|(Tx)(t)-(Ty)(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))-f(s,y(s))]\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant|t-t_0|\max_{s\in J}k|x(s)-y(s)|$$
$$\leqslant k\beta d(x,y).$$

由假设 $k\beta<1$，上式对 $t\in J$ 取最大值. 得到

$$d(Tx,Ty)=\max_{t\in J}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\leqslant k\beta d(x,y),$$

所以 T 是压缩映射.

应用定理 7.2，T 有唯一的不动点 $x\in\tilde{C}$，即 $Tx=x$. 这个 x 是定义在 $J=[t_0-\beta,t_0+\beta]$ 上的连续函数，它是积分方程(7.11)，从而也就是初值问题(7.10)的唯一的解. □

我们还可以知道，初值问题(7.10) 的解 x 可由映射 T 作出的迭代序列 $\{x_n\}$ 取极限而得到. 即 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，这里

$$x_0(t)=x(0),$$
$$x_{n+1}(t)=x(0)+\int_{t_0}^{t} f(s,x_n(s))\mathrm{d}s \quad (n=0,1,2,\cdots).$$

例 3 积分方程的解的存在性与唯一性问题.

定理 7.8 Fredholm 积分方程形如

$$x(t)=v(t)+\mu\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s, \tag{7.13}$$

其中 $x(t)$ 是定义在区间 $[a,\ b]$ 上的未知函数. 设核 $K(t,s)$ 是在矩形区域 $D=\{(t,s)|a\leqslant t\leqslant b,a\leqslant s\leqslant b\}$ 上的连续函数(从而 K 在

D 上有界，可设 $\max\limits_{(t,s)\in D}|K(t,s)|\leqslant c$），$v(t)$ 是一个给定的在 $[a,b]$ 上的连续函数．若参数 μ 满足

$$|\mu|<\frac{1}{c(b-a)},$$

则积分方程(7.13)有唯一的解 $x\in C[a,\ b]$.

证明 对于任意的 $x\in C[a,b]$，令

$$(Tx)(t)=v(t)+\mu\int_a^b K(t,s)x(s)\mathrm{d}s.$$

由于 v，K 都是连续的，则上式定义了一个映射 T：$C[a,\ b]\to C[a,b]$．因为

$$\begin{aligned}d(Tx,\ Ty) &= \max_{t\in[a,b]}|(Tx)(t)-(Ty)(t)|\\ &=|\mu|\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)(x(s)-y(s))\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant|\mu|\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,s)||x(s)-y(s)|\mathrm{d}s\\ &\leqslant|\mu|c\cdot\max_{s\in[a,b]}|x(s)-y(s)|(b-a)\\ &=|\mu|c(b-a)d(x,y),\end{aligned}$$

又由假设 $|\mu|<\dfrac{1}{c(b-a)}$，得到 $|\mu|c(b-a)<1$，所以 T 是完备的度量空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射．应用 Banach 压缩映射定理，有唯一的 $x\in C[a,b]$，使 $Tx=x$，也就是说此 $x(t)$ 满足方程(7.13)．□

方程(7.13)的解 $x(t)$ 可以从 $[a,b]$ 上任意的连续函数 $x_0(t)$ 出发的迭代序列 $\{x_n\}$ 取极限而得到，这里

$$x_{n+1}(t)=v(t)+\mu\int_a^b K(t,s)x_n(s)\mathrm{d}s\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

例4 Volterra 积分方程形如

$$x(t)=v(t)+\mu\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s,\tag{7.14}$$

其中 $x(t)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的未知函数. 设核 K 是在三角形区域 $D=\{(t,s)\mid a\leqslant t\leqslant b, a\leqslant s\leqslant t\}$（见图 7.3）上的连续函数（从而核 K 在 D 上有界，可设 $\max\limits_{(t,s)\in D}|K(t,s)|\leqslant M$），则积分方程 (7.14) 对于任意的 $v\in C[a,b]$ 及任意的参数 μ 存在唯一的解 $x\in C[a,b]$.

证明 定义映射 $T: C[a, b]\to C[a, b]$，使得对任意的 $x\in C[a,b]$

$$(Tx)(t)=v(t)+\mu\int_a^t K(t,s)x(s)\mathrm{d}s. \tag{7.15}$$

对任意的 $x,y\in C[a,b]$，我们有

$$\begin{aligned}|(Tx)(t)-(Ty)(t)| &= |\mu|\left|\int_a^t K(t,s)[x(s)-y(s)]\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant |\mu| M(t-a)\max_{s\in[a,b]}|x(s)-y(s)| \\ &= |\mu| M(t-a)\mathrm{d}(x,y).\end{aligned}$$

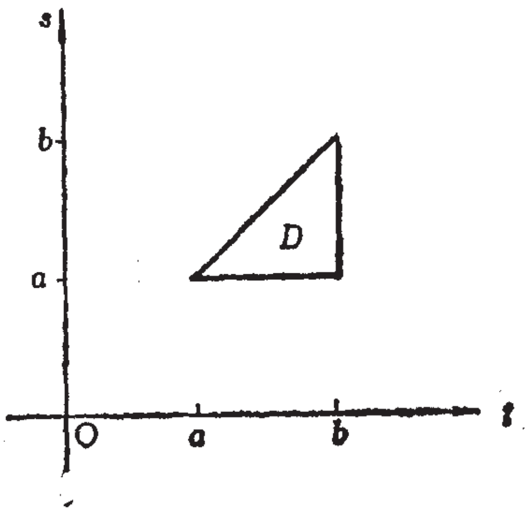


图 7.3

下面，用归纳法来证明，对任意的 $n\in\mathrm{N}$，不等式

$$|(T^n x)(t)-(T^n y)(t)|\leqslant|\mu|^n M^n\frac{(t-a)^n}{n!}\mathrm{d}(x,y) \tag{7.16}$$

成立. 事实上，当 $n=1$ 时，不等式(7.16)成立已经证明. 设 $n=k$ 时，不等式(7.16)成立. 当 $n=k+1$ 时，由(7.15)我们有

$$
\begin{aligned}
&|(T^{k+1}x)(t)-(T^{k+1}y)(t)| \\
=&|\mu|\left|\int_a^t K(t,s)[(T^kx)(s)-(T^ky)(s)]\mathrm{d}s\right| \\
=&|\mu|^{k+1}\frac{M^{k+1}}{k!}\left|\int_a^t (s-a)^k\mathrm{d}s\right|\cdot d(x,y) \\
=&|\mu|^{k+1}M^{k+1}\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!}d(x,y).
\end{aligned}
$$

故不等式(7.16)对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 成立. 对任意的 $n\in\mathbf{N}$, 由(7.16)可得到

$$
\begin{aligned}
d(T^nx,T^ny)&=\max_{t\in[a,b]}|(T^nx)(t)-(T^ny)(t)| \\
&\leqslant|\mu|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}d(x,y).
\end{aligned}
$$

于是, 对任意的参数 μ, 我们总可以选取足够大的 n, 使得

$$
|\mu|^nM^n\frac{(b-a)^n}{n!}<1,
$$

即 T^n 是完备度量空间 $C[a,b]$ 上的压缩映射. 由推论 7.4 知, 积分方程(7.14)在 $C[a,b]$ 中存在唯一的解.

习　题

1. 设线性方程组

$$
\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\ -1\\ 2\end{pmatrix},
$$

应用压缩映射定理证明此方程组有唯一的解.

2. 设 T 是完备度量空间 X 到 X 的映射. 若

$$
\alpha_0=\inf_n\sup_{x\neq y}\frac{d(T^nx,T^ny)}{d(x,y)}<1,
$$

则 T 有唯一的不动点.

3. 设 $f\in C[0,1]$，求证方程

$$x(t)=f(t)+\mu\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \quad (t\in[0,1]),$$

有唯一的连续解 $x(t)=f(t)+\mu\int_0^t e^{\mu(t-s)}f(s)\mathrm{d}s$.

4. 设函数 $g(x)$ 在区间 $J=[x_0-r,x_0+r]$ 上连续且可导，并且满足：(1) $|g'(x)|\leqslant\alpha<1 \quad (x\in J)$，(2) $|g(x_0)-x_0|<(1-\alpha)r$，证明方程 $x=g(x)$ 在 J 中有唯一的解 x，且 x 是迭代序列 $\{x_n\}$ 的极限，这里

$$x_n=g(x_{n-1}) \quad (n\in\mathbf{N}).$$

5. 设函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且可导，$|g'(x)|\leqslant\alpha<1 \quad (x\in\mathbf{R})$. 取定 $x_0\in\mathbf{R}$，令 $x_n=g(x_{n-1})$，证明迭代序列 $\{x_n\}$ 收敛.

§8 紧性

在本节中，将讨论度量空间中具有紧性、列紧性以及完全有界性的集合的性质. 并指出紧度量空间，列紧的度量空间和完备的完全有界空间是相互等价的.

实数的完备性公理之一的 Heine-Borel 定理(见 §5)指出：闭区间$[a,b]$上的任意一个由开区间集组成的覆盖有有限子覆盖. 把有界闭区间的这一性质推广就得到下面在一般度量空间中的紧集的概念.

定义 8.1 设 A 是度量空间 X 的子集. 我们称 A 为**紧集** (compact set)，若 A 的任意一个开覆盖有有限子覆盖，即若 $\mathscr{U}=\{U_\alpha|U_\alpha$ 是 X 中的开集，$\alpha\in D\}$ 是覆盖 A 的任一开集族，则 $\mathscr{U}$ 有有限的子族 $\mathscr{U}_0=\{U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_n}\}$，使 $\mathscr{U}_0$ 覆盖 A.

若 X 本身是紧集，则 X 称为**紧空间**(compact space).

定理 8.2 (1) 若 F 是紧空间 X 中的闭集，则 F 是紧集.

(2) 若 A 是度量空间 X 中的紧集，则 A 是有界闭集.

证明 (1) 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha|U_\alpha$ 是 X 中的开集，$\alpha\in D\}$ 是 F 的任一

开覆盖，则$\mathscr{U}_1=\mathscr{U}\cup\{F^c\}$是$X$的开覆盖．由假设$X$是紧的，则$\mathscr{U}_1$中有有限子族，记为$\{U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_n},F^c\}$，覆盖$X$，从而$\mathscr{U}_0=\{U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_n}\}\subset\mathscr{U}$，$\mathscr{U}_0$覆盖$F$．因此$F$是紧集．

(2) 先证A是闭集．若$A^c=\varnothing$，则A是闭集．现设$A^c\neq\varnothing$．对任意的$x\in A^c$，若$y\in A$，则有$x\neq y$，于是存在$\varepsilon_y>0$，使得$B(x,\varepsilon_y)\cap B(y,\varepsilon_y)=\varnothing$．因此，$\mathscr{B}=\{B(y,\ \varepsilon_y)\,|\,y\in A\}$是$A$的一个开覆盖．由于$A$是紧的，$\mathscr{B}$有有限子族

$$\mathscr{B}_0=\{B(y_1,\varepsilon_{y_1}),\cdots,B(y_n,\varepsilon_{y_n})\}$$

覆盖A．令$\varepsilon=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\varepsilon_{y_i}\}$，则$B(x,\ \varepsilon)\cap B(y_i,\varepsilon_{y_i})=\varnothing\ (i=1,\ \cdots,n)$．从而

$$\varnothing=B(x,\ \varepsilon)\cap\bigcup_{i=1}^{n}B(y_i,\varepsilon_{y_i})\supset B(x,\varepsilon)\cap A.$$

所以$B(x,\varepsilon)\subset A^c$．这说明$A^c$是开集，从而$A$是闭集．

现证A是有界的．取$x_0\in A$，容易看到，$A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(x_0,i)$．由于$A$是紧的．则有有限个开球组成的子族$\{B(x_0,i_1),\cdots,B(x_0,i_n)\}$覆盖$A$．令$N=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\{i_j\}$，则$A\subset B(x_0,N)$．$A$的有界性得证．□

值得注意，度量空间中的有界闭集未必是紧集．

定理8.3 紧集的连续象是紧集．

证明 设f是度量空间X到度量空间Y的连续映射，A是X中的紧集，要证明$f(A)$是Y中的紧集．

设$\mathscr{U}=\{U_\alpha\,|\,\alpha\in D\}$是$f(A)$的任一开覆盖，即$f(A)\subset\bigcup\limits_{\alpha\in D}U_\alpha$，则

$$A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in D}U_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha\in D}f^{-1}(U_\alpha).$$

记$\mathscr{U}^{-1}=\{f^{-1}(U_\alpha)\,|\,\alpha\in D\}$．因为$f$是连续的，所以每一个$f^{-1}(U_\alpha)$

是X中的开集. 由上式知$\mathscr{U}^{-1}$是A的开覆盖. 因A是紧的, 则$\mathscr{U}^{-1}$有有限子族$\{f^{-1}(U_{\alpha_1}),\cdots,f^{-1}(U_{\alpha_n})\}$覆盖$A$, 即$\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})\supset A$.

于是

$$f(A)\subset f\left(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(U_{\alpha_i})\right)=\bigcup_{i=1}^{n} f(f^{-1}(U_{\alpha_i}))\subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

这表明, $\mathscr{U}$的有限子族$\{U_{\alpha_1},\cdots,U_{\alpha_n}\}$覆盖$f(A)$. 因此, $f(A)$是紧的. □

我们知道, 定义在数直线$\mathbf{R}$的有界闭区间上的连续函数是有界的并且可以达到上确界和下确界. 这也是紧集所具有的性质.

定理 8.4 紧集上的连续泛函是有界的, 并且可以达到上确界和下确界.

证明 设A是度量空间X中的紧集, 泛函$f: X\to\mathbf{R}$是连续的. 要证明, $f(A)$是有界的, 并且存在$x_1, x_2\in A$, 使得$f(x_1)=\sup\limits_{x\in A} f(x)$, $f(x_2)=\inf\limits_{x\in A} f(x)$(换句话说, $f(A)$有最大值和最小值).

由定理 8.3, $f(A)$是$\mathbf{R}$中的紧集. 再应用定理8.2(2), $f(A)$是$\mathbf{R}$中的有界闭集. 设$M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$, 由上确界的性质, 对任意$\varepsilon>0$, 存在$x\in A$使得$M-\varepsilon<f(x)\leqslant M$, 即以$M$为中心. 任意$\varepsilon>0$为半径的开球$B(M,\varepsilon)$都与$f(A)$相交, 则$M\in\overline{f(A)}=f(A)$ (见§2 习题 4). 因此, 存在$x_1\in A$, 使得$f(x_1)=M=\sup\limits_{x\in A} f(x)$.

同理, 存在$x_2\in A$, 使得$f(x_2)=\inf\limits_{x\in A} f(x)$. □

由实数完备性的另一个公理推出: 若A是数直线$\mathbf{R}$中的有界集, 则A中任意序列都有收敛的子序列. 这一性质推广到一般的度量空间中, 可得到下面列紧集的定义.

定义 8.5 设A是度量空间X的子集. 若A中的任意一个序

列都有在X中收敛的子序列(即子序列的极限在X中)，则A称为X中的列紧集(sequntially compact set).

若X本身是列紧集,则X称为列紧空间(sequentially compact space).

由此定义,当X是列紧空间时,X中任意序列$\{x_n\}$都有一个子序列$\{x_{n_k}\}$,使得$x_{n_k}\to x\in X$. 但是，若A是X中的列紧集，A作为X的子空间不一定是列紧空间. 当A作为X的子空间是列紧空间时,则A中的任意一个序列都有收敛于A中某一点的子序列,这样的集A，实际上是列紧的闭集，在有的书上称为自列紧集.

例1 在数直线$\mathbf{R}$中的任意有界集是列紧的. 特别地，闭区间$[0, 1]$和开区间$(0,1)$都是$\mathbf{R}$中的列紧集.

作为$\mathbf{R}$的子空间,$[0, 1]$是列紧空间,而$(0,1)$不是列紧空间. 事实上,$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是$(0,1)$中的序列,$\left\{\frac{1}{n}\right\}$的任一子序列都收敛于0，但是$0\notin(0,1)$.

$\mathbf{R}$是完备的度量空间,但不是列紧的. 例如,序列$\{n\}$在$\mathbf{R}$中没有收敛的子序列.

例2 $C[0,1]$是完备的度量空间(见§5例4),但它不是列紧空间. 例如,取$[0,1]$上的连续函数列$\{x_n(t)\}$:

$$x_n(t)=\begin{cases}0, 若\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1,\\ 1-nt, 若当0\leqslant t<\frac{1}{n}.\end{cases}$$

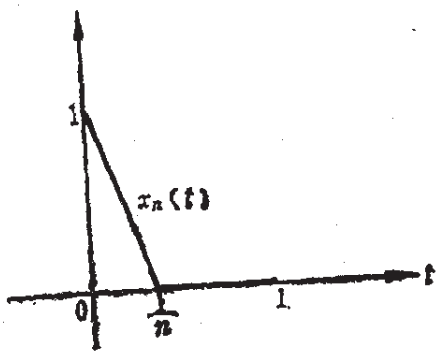


图 8.1

可以看到,$\{x_n\}$是$C[0,1]$中的有界序列,$\{x_n\}$在$C[0, 1]$中没有收敛的子序列.

在什么条件下,$C[0,1]$的子集是列紧的呢? 回答包含在下面的定理中.

定理 8.6 (Arzela-Ascoli) 设A是$C[a, b]$的子集. A是列紧集的充分必要条件是, A满足:

(1) A是有界的, 即存在常数c, 使得对一切$x\in A$,

$$\max_{t\in[a,b]}|x(t)|\leqslant c,$$

(2) A是等度连续的, 即对任意$\varepsilon>0$, 存在$\delta>0$(δ仅与ε有关), 使得对任何$t_1, t_2\in[a,b]$, 当$|t_1-t_2|<\delta$时, 对一切$x\in A$

$$|x(t_1)-x(t_2)|<\varepsilon.$$

证明略.

从例1和例2, 我们看到完备的度量空间不一定是列紧空间. 反过来的结论却是成立的.

引理 8.7 若度量空间X是列紧的, 则X是完备的.

证明 设$\{x_n\}$是X中任一 Cauchy 序列. 由假设X是列紧空间, 则$\{x_n\}$有一子序列$\{x_{n_k}\}$, 使得$x_{n_k}\to x\in X$. 由引理5.2, 得到$x_n\to x\in X$. X的完备性得证. □

定义 8.8 设A是度量空间X的子集. 对于给定的$\varepsilon>0$, 若存在X的子集B, 使得以B中每一点为中心、ε为半径的开球的全体覆盖A, 即

$$\bigcup_{x\in B}B(x,\varepsilon)\supset A,$$

则B称为A的一个ε-网(ε-net). 当B是A的ε-网, 同时又是有限集时, B称为A的有限的ε-网(finite ε-net).

若对于任意$\varepsilon>0$, 集A有有限的ε-网, 则A称为完全有界集(totally bounded set). 若X本身是完全有界集, 则X称为完全有界空间(totally bounded space).

引理 8.9 若度量空间X是完全有界的, 则(1)X是有界的; (2)X是可分的.

证明 (1) 设$\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$是$X$的1-网, 对任意$x\in X$, 则存

在 $x_i(1\leqslant i\leqslant n)$，使得

$$d(x,x_i)<1.$$

令 $M=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}d(x_1,x_j)$，则

$$\begin{aligned}d(x,x_1)&\leqslant d(x,x_i)+d(x_i,x_1)\\&<1+\max_{1\leqslant j\leqslant n}d(x_j,x_1)=1+M.\end{aligned}$$

这表明 $X\subset B(x_1,M+1)$. 由引理 2.3，X是有界的.

(2) 对任意的 $n\in\mathbf{N}$，设 B_n 是X的有限$\frac{1}{n}$-网，令

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n,$$

则B是至多可数集. 现在证明 $\bar{B}=X$. 为此，只要证明$X\subset\bar{B}$. 因为对任意 $x\in X$ 和任意 $n\in\mathbf{N}$，存在 $x_n\in B_n$，使得 $x\in B(x_n,\frac{1}{n})$，从而 $x_n\in B\left(x,\frac{1}{n}\right)$，也就是说，$\varnothing\neq B\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap B_n\subset B\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap B$. 现在对于任意 $r>0$，可选取 $n\in\mathbf{N}$，使得 $\frac{1}{n}<r$，于是$B(x,r)\cap B\supset B\left(x,\frac{1}{n}\right)\cap B\neq\varnothing$. 由§2习题 4，得到 $x\in\bar{B}$. 因此X是可分的. □

作为本节的结尾，我们指出度量空间X的紧性，列紧性和完全有界性有下列等价关系.

定理 8.10 设X是度量空间，则下列各条等价.

(1) X是紧空间.

(2) X是列紧空间.

(3) X是完备的完全有界空间.

证明 (1)⇒(2)设X是紧空间. $\{x_n\}$是X中的任一序列. 令F_n为集$\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$的闭包，我们证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.若不然$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=$

$\varnothing$，令 $U_n=X\setminus F_n$，则$\mathscr{U}=\{U_n|n\in\mathbf{N}\}$是$X$的开覆盖．由$X$的紧性，$\mathscr{U}$有有限子覆盖，即存在$\{U_{n_1},\cdots,U_{n_k}\}\subset\mathscr{U}$，使$\bigcup_{i=1}^{k}U_{n_i}=X$．从而

$$\bigcap_{i=1}^{k}F_{n_i}=X\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{k}U_{n_i}\right)=\varnothing.$$

但这是不可能的，因为若取 $n=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}$，则有$\bigcap_{i=1}^{k}F_{n_i}=F_n\neq\varnothing$.

我们可设 $a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$，即对任何的 $n\in\mathbf{N}$有

$$a\in F_n=\overline{\{x_n,x_{n+1},\cdots\}}.$$

由 $a\in F_1$，我们可选取一点 $x_{n_1}\in B(a,1)\cap\{x_1,x_2,\cdots\}$．由 $a\in F_{n_1+1}$，我们可选取一点 $x_{n_2}\in B\left(a,\dfrac{1}{2}\right)\cap\{x_{n_1+1},x_{n_1+2},\cdots\}$．一般地说，由 $a\in F_{n_i+1}(i\in\mathbf{N})$，我们可选取一点

$$x_{n_{i+1}}\in B\left(a,\ \frac{1}{i+1}\right)\cap\{x_{n_i+1},x_{n_i+2},\cdots\}.$$

易见$\{x_{n_i}\}$是$\{x_n\}$的子序列且 $x_{n_i}\to a(i\to\infty)$．因此X是列紧空间．

(2)⇒(3)　设 X 是列紧空间．由引理 8.7，X 是完备的．现在证明 X 是完全有界的．若不然，X 不是完全有界的，则存在$\varepsilon>0$，使得 X 没有有限的 ε-网．任取 $x_1\in X$，则必有 $x_2\in X$，使得$d(x_1,x_2)\geqslant\varepsilon$（否则，$\{x_1\}$就是有限的 ε-网）．同理，必有 $x_3\in X$，使得 $d(x_1,x_3)\geqslant\varepsilon$，$d(x_2,x_3)\geqslant\varepsilon$．如此继续下去，可得到一个序列$\{x_n\}$满足：当 $i\neq j$ 时，$d(x_i,x_j)\geqslant\varepsilon$．这个序列当然不含任何收敛的子序列．此与 X 的列紧性矛盾．

(3)⇒(1)　设X是完备的完全有界空间．若 X 不是紧空间，则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha|\alpha\in D\}$，它没有有限子覆盖．

由于 X 是完全有界的，对于 $\varepsilon=1$，X 有有限的 1-网 $Y_1=\{x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\cdots,x_{m_1}^{(1)}\}$，于是

$$X=\bigcup_{i=1}^{m_1}B(x_i^{(1)},1).$$

因此，存在 $x_1\in Y_1$，使得 $B(x_1,\ 1)$ 不能被 $\mathscr{U}$ 的任一有限子族覆盖.(否则，X 将被 $\mathscr{U}$ 的一个有限子族覆盖，得到矛盾.) 又 X 有有限的 $\frac{1}{2}$-网 $Y_{\frac{1}{2}}=\{x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_{m_2}^{(2)}\}$，于是

$$B(x_1,1)\subset X=\bigcup_{i=1}^{m_2}B(x_i^{(2)},\frac{1}{2}).$$

因此，存在 $x_2\in Y_{\frac{1}{2}}$，使得 $B\left(x_2,\ \frac{1}{2}\right)\cap B(x_1,\ 1)\neq\varnothing$ 且 $B\left(x_2,\ \frac{1}{2}\right)$ 不能被 $\mathscr{U}$ 的任一有限子族覆盖(否则 $B(x_1,\ 1)$ 将被 $\mathscr{U}$ 的一个有限子族覆盖，得到矛盾). 如此继续下去，可得到一列开球 $\left\{B(x_{n+1},\frac{1}{2^n})\right\}$ 满足 $B\left(x_{n+1},\frac{1}{2^n}\right)\cap B\left(x_n,\ \frac{1}{2^{n-1}}\right)\neq\varnothing$ 且 $B\left(x_{n+1},\frac{1}{2^n}\right)$ 不能被 $\mathscr{U}$ 的任一有限子族覆盖 $(n=1,\ 2,\ \cdots)$. 取 $y_n\in B\left(x_{n+1},\frac{1}{2^n}\right)\cap B\left(x_n,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$，由三角不等式，

$$\begin{aligned}d(x_{n+1},x_n)&\leqslant d(x_{n+1},y_n)+d(y_n,x_n)\\&<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2^{n-2}}.\end{aligned}$$

因此，对任意正整数 $p,\ q\geqslant n$(不妨设 $p<q$)，

$$\begin{aligned}d(x_p,x_q)&\leqslant d(x_p,x_{p+1})+d(x_{p+1},x_{p+2})+\cdots+d(x_{q-1},x_q)\\&<\frac{1}{2^{p-2}}+\frac{1}{2^{p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{q-3}}\\&<\frac{1}{2^{p-3}}\leqslant\frac{1}{2^{n-3}}.\end{aligned}$$

可见，$\{x_n\}$是X中的Cauchy序列. 由X的完备性，可设$x_n\to a$. 由于$\mathscr{U}$覆盖X，则存在$U_{\alpha_0}\in\mathscr{U}$使得$a\in U_{\alpha_0}$. 而$U_{\alpha_0}$是开集，故存在$r>0$，使得$B(a,r)\subset U_{\alpha_0}$. 由于$x_n\to a$，则存在充分大的正整数$n$使得$d(x_n, a)<\frac{r}{2}$且$\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{r}{2}$. 由三角不等式可得$B\left(x_n,\frac{1}{2^{n-1}}\right)\subset B(a,r)\subset U_{\alpha_0}$. 此与$B\left(x_n,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$不能被$\mathscr{U}$的任一有限子族覆盖相矛盾. □

设$A\subset X$. 易知，A作为X的子空间是紧空间，当且仅当A是X中的紧集；A作为X的子空间是列紧空间，当且仅当A是X中的列紧的闭集. 于是，定理8.10有如下推论.

推论8.11 设A是度量空间X的子集，则下列三条等价：

(1) A是紧集.

(2) A是列紧的闭集.

(3) A中任意序列$\{x_n\}$都有在A中收敛的子序列.

习题

1. 设X是离散的度量空间且X是无限集，则X不是紧的.

2. 举例说明定理8.2(2)的逆命题不成立，即度量空间中的有界闭集不一定是紧集.

3. 证明有限多个紧集的并是紧集.

4. 证明任意多个紧集的交是紧集.

5. 证明在n维欧氏空间$\mathbf{R}^n$中，A是列紧的，当且仅当A是有界的.

6. 设(X,d)和(Y,ρ)是两个度量空间，F是X中的紧集. 证明若$f:F\to Y$是连续映射，则f必是一致连续映射.

7. 设A是度量空间(X,d)中的紧集，B是X中的闭集且$A\cap B=\varnothing$，证明存在$a\in A$使得

$$d(a,B)=d(A,B)>0.$$

8. 设A和B都是度量空间(X,d)中的紧集且$A\cap B=\varnothing$. 证明存在$a\in A$

以及 $b\in B$ 使得

$$d(a,b)=d(A,B).$$

9. 设(X,d)是紧空间，$\{A_n\}$是X中一列非空的闭集且

$$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots,$$

证明 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$.

10. 设(X,d)是紧空间，映射 $f:X\to X$ 满足

$$d(f(x),f(y))<d(x,y)\qquad(x,y\in X,x\neq y).$$

证明映射 f 有唯一的不动点 $x^*\in X$，即 $x^*=f(x^*)$.

*§9 拓扑空间

以度量空间作为模型，我们可以再作进一步的抽象得到一类更一般的空间——拓扑空间. 由§2知，任何一个度量空间中的开集族皆有这样的性质：空集和全空间是开集；任意多个开集的并是开集；有限多个开集的交是开集. 这三条性质可以抽象为拓扑空间中的开集族必须要满足的三条公理(拓扑公理)，从而得到拓扑空间的定义. 拓扑空间中有了开集族的结构，就可以仿照度量空间的办法定义闭集、邻域、内点、内部、聚点、导集和闭包等概念，同时还可以定义收敛的概念等. 现在，拓扑空间的理论在泛函分析和其它数学分支的理论研究中是不可缺少的工具. 我们在本节中对拓扑空间的一些最基本的概念和性质作一个粗略的介绍. 读者在学习本书时，可以略去本节的内容而不会影响后面内容的学习.

定义9.1 设$\mathscr{T}$是非空集合X的子集为元素的一个集族，满足

(T_1) $X\in\mathscr{T},\varnothing\in\mathscr{T}$;

(T_2) 任意多个$\mathscr{T}$中元素的并仍是$\mathscr{T}$中的元素，即若$U_\alpha\in\mathscr{T}(\alpha\in D)$，则$\bigcup\limits_{\alpha\in D}U_\alpha\in\mathscr{T}$;

(T_3) 有限多个$\mathscr{T}$中元素的交仍是$\mathscr{T}$中的元素，即若$U_i\in\mathscr{T}$ ($i=1,\cdots,n$)，则$\bigcap\limits_{i=1}^{n}U_i\in\mathscr{T}$.

则$\mathscr{T}$称为集X上的一个拓扑(topology)，(X, $\mathscr{T}$)称为拓扑空间(topological space)．当不会发生误解时，(X, 　)可简记为X. $\mathscr{T}$的元素称为X的开集(open set).

例1 设(X,d)是度量空间．在定义2.4的意义下，X中开集的全体为

$$\mathscr{T}=\{G\subset X\mid G=\varnothing,\text{或者当 } x\in G \text{ 时，必存在 } r>0 \text{ 使 } B(x,r)\subset G\}.$$

容易验证，$\mathscr{T}$满足(T_1)，(T_2)，(T_3)．于是，$\mathscr{T}$是X上的拓扑(即$\mathscr{T}$是在定义9.1的意义下X的开集的全体)．这个拓扑$\mathscr{T}$称为由度量d导出的拓扑．因此，度量空间可看作一类特殊的拓扑空间.

例2 设X是一个集．X的全体子集组成的集族

$$\mathscr{T}_d=\{G\mid G\subset X\}$$

是X上的拓扑，称为离散拓扑(discrete topology)，(X, $\mathscr{T}_d$)称为离散空间(discrete space).

$$\mathscr{T}_i=\{X,\varnothing\}$$

也是X上的拓扑，称为紧连拓扑(indiscrete topology)或称为平凡拓扑(trivial topology)，(X, $\mathscr{T}_i$)称为紧连空间(indiscrete space)或平凡拓扑空间(trivial topological space).

显然，离散空间具有这样的特征：(X, $\mathscr{T}_d$)是离散空间，当且仅当每一个$x\in X$，单点集$\{x\}$是X中的开集.

从例2中可以看到，在同一个集X上可以有不同的拓扑．若X上的拓扑$\mathscr{T}_1$和$\mathscr{T}_2$有包含关系$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$，则称$\mathscr{T}_1$弱于(weaker)或粗于(coarser)$\mathscr{T}_2$，或者说$\mathscr{T}_2$强于(stronger)或细于(finer)$\mathscr{T}_1$．若$\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$且$\mathscr{T}_1\supset\mathscr{T}_2$，则称$\mathscr{T}_1$与$\mathscr{T}_2$是一致的或相等的.

在例 2 中，紧连拓扑 $\mathscr{T}_i$ 是 X 上最弱的拓扑，离散拓扑 $\mathscr{T}_d$ 是 X 上最强的拓扑.

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间. 若 X 上存在一个度量 d，使得由 d 导出的拓扑 $\mathscr{T}_0$ 与 $\mathscr{T}$ 一致，则称 $(X,\mathscr{T})$ 是可度量化的(metrizable). 例如离散空间 $(X,\mathscr{T}_d)$ 是可度量化的. 实际上，令

$$d(x,y)=\begin{cases}0, \text{若 } x=y,\\ 1, \text{若 } x\neq y.\end{cases}$$

则 d 是 X 上的度量(离散度量)，且 d 所导出的拓扑就是离散拓扑 $\mathscr{T}_d$.

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间，Y 是 X 的子集. 令

$$\mathscr{T}_Y=\{U\,|\,U=G\cap Y, G\in\mathscr{T}\},$$

容易证明 $(Y,\mathscr{T}_Y)$ 是拓扑空间. $\mathscr{T}_Y$ 称为 $\mathscr{T}$ 的相关拓扑 (relative topology)，$(Y,\mathscr{T}_Y)$ 称为 $(X,\mathscr{T})$ 的子空间(subspace).

下面，在拓扑空间 $(X,\mathscr{T})$ 中，我们给出一些常用的术语的定义.

设 $A\subset X$. 若 A 的余集 $A^c\in\mathscr{T}$，则 A 称为 X 中的闭集(closed set).

设 $x\in V\subset X$. 若存在 $G\in\mathscr{T}$ 使得 $x\in G\subset V$，则 V 称为点 x 的邻域(neighborhood). 若 V 是包含点 x 的开集，则 V 称为 x 的开邻域 (open neighborhood). 点 x 的邻域的全体称为 x 的邻域系(neighborhood system)，记为 $\mathfrak{M}(x)$. 显然，若 $V\in\mathfrak{M}(x)$，则 $x\in V$；若 $V\in\mathfrak{M}(x)$，$V\subset U$，则 $U\in\mathfrak{M}(x)$；若 $U,V\in\mathfrak{M}(x)$，则 $U\cap V\in\mathfrak{M}(x)$.

设 $x\in A\subset X$. 若 $A\in\mathfrak{M}(x)$，则点 x 称为 A 的内点(interior point). A 的内点的全体称为 A 的内部(interior)，记为 A°. 可以同样地证明，定理 2.8 的结论对于拓扑空间 X 也是成立的.

设 $A\subset X$，$x\in X$. 若对于任意 $V\in\mathfrak{M}(x)$ 都有 $A\cap(V\setminus\{x\})\neq\varnothing$，则 x 称为 A 的聚点(accumulation point). A 的聚点的全体称为

A 的导集(derived set),记为A'. 集$\bar{A}=A\cup A'$ 称为A的闭包(closure). 与引理 2.10 相类似,$x\in\bar{A}$ 当且仅当对于任意 $V\in\mathfrak{N}(x)$都有 $A\cap V\neq\varnothing$. 并且定理 2.11 的结论(1)—(4)对于拓扑空间X也是成立的.

设 $A\subset X$. 若 $\bar{A}=X$, 则称A在X中稠密(dense). 若X中有一个可数稠密的子集,则X称为是可分的(separable).

例 3 $X=\{a,b,c\}$. 令

$$\mathscr{T}=\{\varnothing,\{a\},\{a,b,\},X\}$$

则$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间. 由$\mathscr{T}$的定义可知, $\{a\}$是开集, 但不是闭集; $\{a\}$的导集是$\{b,c\}$,从而$\overline{\{a\}}=X$,或者说,集$\{a\}$在Y中稠密.

定义 9.2 设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间. 若对于任意$x,y\in X,x\neq y$,存在$U\in\mathfrak{N}(x)$, $V\in\mathfrak{N}(y)$使得$U\cap V=\varnothing$,则$(X,\mathscr{T})$称为 Hausdorff空间(Hausdorff space).

度量空间是 Hausdoff 空间,因为对于任意相异的两点x, y, 有$d(x,y)=r>0$, 于是$B\left(x,\frac{r}{2}\right)$与$B\left(y,\frac{r}{2}\right)$分别是$x$与$y$的邻域且互不相交.

由定义容易证明, 在 Hausdorff 空间中, 每一个单点集都是闭集. 另外,在 Hausdorff 空间中还有一个重要的性质:收敛序列的极限是唯一的. 为此, 我们先给出序列收敛的定义.

定义 9.3 设$\{x_n\}$是拓扑空间X中的序列,$x\in X$. 若对每一个$V\in\mathfrak{N}(x)$,存在正整数N,使得当$n>N$时

$$x_n\in V,$$

则称序列$\{x_n\}$收敛于x(converges to x), 记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 或 $x_n\to x$. 这时, x称为序列$\{x_n\}$的极限(limit).

定理 9.4 在 Hausdorff 空间X中, 收敛序列的极限是唯一的.

证明 设$\{x_n\}$是 X 中的收敛序列. 假若 $x_n \to x$, $x_n \to y$ 并且 $x \neq y$, 由于X是Hausdorff 空间, 则存在$U \in \mathfrak{M}(x)$, $V \in \mathfrak{M}(y)$, 使得 $U \cap V = \varnothing$. 因$x_n \to x$, 则存在正整数N_1, 使得$x_n \in U\ (n > N_1)$; 又因 $x_n \to y$, 则存在正整数N_2, 使得$x_n \in V\ (n > N_2)$, 令$N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时

$$x_n \in U \cap V = \varnothing,$$

得到矛盾. 因此, 只能有 $x = y$. □

由于度量空间作为拓扑空间是Hausdorff 空间, 因此, 在度量空间中收敛序列的极限是唯一的. 这表明, 引理 4.2(2)是定理 9.4 的特殊情况.

定义 9.5 设 X, Y 是两个拓扑空间, $f: X \to Y$. 给定 $x_0 \in X$, 若对于任意 $V \in \mathfrak{M}(f(x_0))$, 存在 $U \in \mathfrak{M}(x_0)$, 使得 $f(U) \subset V$, 则称 f 在点 x_0 连续 (continuous at a point x_0). 若映射 f 在 X 的每一点都连续, 则称 f 在X上是连续的(continuous).

对照定义 4.4(1) 及它的等价条件可以看到, 定义 9.5 是定义 4.4(1)的一个直接推广. 进一步, 在我们考察映射 f 在X上连续的特征时, 仿照定理 4.6 的证明方法(只需要对其中的用语作适当的修改, 例如将开球换为开集), 可得到下面的定理. 其证明不再赘述.

定理 9.6 设X和Y是两个拓扑空间, 映射 $f: X \to Y$, 则下列各条等价.

(1) f 是连续的.

(2) 对于Y中任意开集 G, $f^{-1}(G)$是X中的开集.

(3) 对于Y中任意闭集 F, $f^{-1}(F)$是X中的闭集.

但是, 定理 4.5 不能照搬到一般的拓扑空间中, 也就是说, 映射连续的特征不能用序列的收敛来刻划. 具体地说, 下面的定理仅指出映射 $f: X \to Y$ 在点 x_0 连续的必要条件, 但此条件并不

充分.

定理 9.7 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$. 若 f 在点 $x_0\in X$ 连续，则对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$，当 $x_n\to x_0$（在 X 中）时，必有 $f(x_n)\to f(x_0)$（在 Y 中）.

证明 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任意序列，$x_n\to x_0$，要证明 $f(x_n)\to f(x_0)$. 对于任意的 $V\in\mathfrak{M}(f(x_0))$，由假设 f 在点 x_0 连续，则存在 $U\in\mathfrak{M}(x_0)$，使得 $f(U)\subset V$. 因 $x_n\to x_0$，按定义 9.5，存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时 $x_n\in U$. 从而当 $n>N$ 时

$$f(x_n)\in f(U)\subset V.$$

因此 $f(x_n)\to f(x_0)$. □

需要指出，此定理的逆命题不成立.

定义 9.8 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$. 若 X 中的每一个开集 G 的象 $f(G)$ 是 Y 中的开集，则 f 称为开映射 (open mapping).

显然，若 f 是 X 到 Y 的双射，则 f 是开映射，当且仅当 f^{-1} 是连续的. 因为当 f 为双射时，对 $G\subset X$ 有 $f(G)=(f^{-1})^{-1}(G)$.

定义 9.9 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f:X\to Y$. 若 f 是双射，并且 f 和 f^{-1} 都是连续的（等价地，f 是双射、连续和开的），则 f 称为 X 到 Y 的同胚映射 (homeomorphism).

若存在一个拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的同胚映射，则称 X 与 Y 是同胚的 (homeomorphic).

由于拓扑空间中的拓扑结构由全体开集所决定，故当两个拓扑空间 X 和 Y 同胚时，可以认为两个空间中的拓扑结构是相同的. 因此，按拓扑的观点可把两个同胚的拓扑空间看作是同一的.

由 §4 习题 5 知，若两个度量空间 X 与 Y 是等距的，则在等距映射下 X 与 Y 是同胚的.

第三章　测度与可测函数

在这一章和下一章中，我们将介绍 Lebesgue(1875-1941) 测度与 Lebesgue 积分的理论.

早在十九世纪时，数学家们就已经认识到 Riemann (1826-1866)积分在理论上和应用上都有很大的局限性. 因此，有必要建立具有应用范围更广的新的积分理论. 而不同的积分理论，总是建立在不同的测度理论的基础之上的. 在 1898 年 Borel 建立了 R 中点集(Borel 集)的测度理论. 稍后，Lebesgue 在 1902 年又提出了 Lebesgue 测度. 后来 Carathéodory 在 1918 年左右又深入地研究了外测度的性质，使测度理论有了较快的发展.

今天，测度理论及其方法在近代分析、概率论以及一些其他学科领域中，已经成了不可缺少的工具.

在本章里，我们要重点讨论 Lebesgue 测度与可测函数两个问题. 为了便于理解，我们将重点讨论数直线 R 中集合的Lebesgue 测度，以及其上定义的可测函数，有关的性质和结论不难推广到 R^n中去.

§1　点集的 Lebesgue 测度

建立 Lebesgue 积分，首先要解决的问题是如何定义点集的 Lebesgue 测度. 我们知道，数直线 R 上的一个区间的长度是该区间两个端点的值之差的绝对值. 对于 R 上的一般点集，我们将制定一种相应于“长度”的度量办法来度量点集，这就是所谓点集的测度. 深入一步讲，测度是一个集函数 m，对于某一由 R 的子

集构成的集族中的每一个集E，对应了一个广义实数值mE（即mE可以是有限或无穷）．点集可以有多种不同类型的测度，最初，人们希望能够在$\mathbb{R}$上建立这样一种测度m，它能满足如下的要求：

(1) 测度m是区间长度概念的推广．也就是说，若I表示如下形式的区间：(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$[a,b]$（这里$a<b$），那末I的测度就是区间I的长度$b-a$，即

$$mI=b-a.$$

(2) 测度m具有可数可加性．即若$\{E_n\}$ $(n=1,2,\cdots)$表示$\mathbb{R}$中一列互不相交的集合，每一个E_n已有了测度mE_n，则$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$也有测度$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)$，且

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}mE_n .$$

(3) 测度m具有平移不变性．也就是说，若$E\subset\mathbb{R}$已有了测度mE，对于取定的$y\in\mathbb{R}$，令

$$E+y=\{x+y\mid x\in E\}$$

($E+y$是E的平移)，则$m(E+y)=mE$.

(4) $\mathbb{R}$的每一个子集E都具有测度mE.

但是，人们发现$\mathbb{R}$上的测度m同时满足上述四个条件的要求是不能实现的，或者说$\mathbb{R}$上不存在这样的集函数m同时满足上述四个条件（严格的证明已超出了本书的范围）．因此，四个条件中必须减弱某一个条件．为了具有更广的适用性，我们保留前三个条件，而减弱条件(4)，即并不保证使每一个$\mathbb{R}$的子集都具有测度．这种测度就是下面我们所要讨论的Lebesgue测度．它虽然

有这一点不足，但是我们可以看到，仍有相当多的集合具有测度.例如 R 中的开集 E，它可以表示为互不相交的构成区间$\{I_n\}$之并，即 $E=\bigcup_{k=1}^{n} I_k$（n 为正整数或∞）. 由可数可加性，有

$$mE=\sum_{k=1}^{n} mI_k.$$

下面我们来建立点集的 Lebesgue 测度. 我们先介绍点集的外测度. 开区间 I 的长度仍用记号$|I|$来表示.

定义 1.1 设 $E\subset\mathbb{R}$. 对于每一列覆盖 E 的开区间$\{I_n\}$①可以得到各开区间长度的和$\sum_n |I_n|$.（此和数可以是一个非负实数，也可以等于$+\infty$，它是由这一列开区间唯一确定的.）所有的和数组成的集合是下方有界的，故存在下确界. 我们称这个下确界为 E 的 Lebesgue 外测度(Lebesgue outer measure)，或简称为 E 的外测度，记为 m^*E，即

$$m^*E=\inf\left\{\sum_n |I_n| \,\middle|\, E\subset\bigcup_n I_n\right\}.$$

外测度具有以下三条性质：

（1）对任意的集 E，均有 $m^*E\geqslant 0$. 当 E 为空集时，有$m^*E=0$.

（2）若 A、B 两集满足 $A\subset B$，则有 $m^*A\leqslant m^*B$（单调性）.

（3）设$\{A_n\}$（$n=1,2,\cdots$）为 R 中的一列集，则

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} m^*A_n \qquad \text{（次可数可加性）}.$$

---

① 覆盖 E 的一列开区间$\{I_n\}$可以包含有限个开区间，也可以包含可数个开区间. 这样，我们用符号$\bigcup_n I_n$表示这一列（含有有限多个或可数多个）开区间$\{I_n\}$之并，用符号$\sum_n |I_n|$表示这一列开区间的长度之和.

性质(1)是显然成立的. 下面我们给出性质(2)与性质(3)的证明.

性质(2)的证明 由于 $A\subset B$，故任意一列覆盖 B 的开区间 $\{I_n\}$ 也必覆盖 A，于是

$$m^*A\leqslant\sum_n|I_n|.$$

因此

$$m^*A\leqslant\inf\left\{\sum_n|I_n|\ \Big|\ B\subset\bigcup_n I_n\right\}=m^*B\ .$$

性质(3)的证明 任给 $\varepsilon>0$，由外测度的定义，对每一个 n，都有一列开区间 $I_1^{(n)},I_2^{(n)}$，…使 $A_n\subset\bigcup\limits_k I_k^{(n)}$，且

$$\sum_k|I_k^{(n)}|\leqslant m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

我们有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_k I_k^{(n)},$$

并且

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sum_k|I_k^{(n)}|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*A_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性，我们得到

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*A_n.$$

例1 设 E 为[0,1]中的全体有理数集合，则 $m^*E=0$.

证明 设 $E=\{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$. 对任意的 $\varepsilon>0$, 令

$$I_n=\left(r_n-\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, r_n+\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right), (n=1,2,\cdots).$$

则 $|I_n|=\frac{\varepsilon}{2^n}$, 且 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. 由外测度的定义, 有

$$0\leqslant m^*E\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 我们得到 $m^*E=0$.

运用上面的方法, 我们同样可以证明: 对于 $\mathbf{R}$ 中的任何一个可数集合或有限集合 E, 均有 $m^*E=0$.

例 2 区间 I 的外测度 $m^*I=|I|$.

证明 (1) 设 $I=[a,b]$ 为闭区间.

对任意的 $\varepsilon>0$, 由于开区间 $\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 包含了 $[a,b]$, 则

$$m^*[a,b]\leqslant\left|\left(a-\frac{\varepsilon}{2}, b+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right|=b-a+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性, 我们得到

$$m^*[a,b]\leqslant b-a.$$

另一方面, 若 $\{I_n\}$ 是任意的一列覆盖 $[a,b]$ 的开区间, 由于 $[a,b]$ 是紧集, 则 $\{I_n\}$ 有有限子族覆盖 $[a,b]$. 设其为 $h=\{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$, 即 $[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m} I_i$. 对于点 a, 必有某一个 I_i 包含了 a, 我们记这个开区间为 (a_1,b_1), 即 $a_1<a<b_1$. 对于 b_1, 若 $b_1\leqslant b$, 则必有 $(a_2,b_2)\in h$, 使得 $b_1\in(a_2,b_2)$, 即 $a_2<b_1<b_2$. 按照这个方法继续下去, 由于 h 是有限子族, 则上述步骤进行到有限次 (设为 k 次) 之后, 我们从 h 中选出了 k 个开区间 $(a_1,b_1), \cdots, (a_k,b_k)$ 满足

(i) $a_i<b_{i-1}<b_i$, $(i=2,3,\cdots,k)$.

(ii) 最后选出的开区间(a_k,b_k)包含了 b，即 $a_k<b<b_k$，于是

$$\Sigma|I_n|\geqslant\sum_{i=1}^{k}|(a_i,b_i)|=(b_k-a_k)+(b_{k-1}-a_{k-1})+\cdots+(b_1-a_1)$$

$$=b_k-(a_k-b_{k-1})-\cdots-(a_2-b_1)-a_1$$

$$>b_k-a_1$$

$$>b-a.$$

所以

$$m^*[a,b]=\inf\{\Sigma|I_n|\,|[a,b]\subset\bigcup I_n\}\geqslant b-a.$$

因此我们得到

$$m^*[a,b]=b-a.$$

(2) 设 I 为任意区间

对于任意的 $\varepsilon>0$，存在闭区间 I_1，使得 $I_1\subset I$，且有$|I_1|>|I|-\varepsilon$. 若记 $\bar{I}$ 为 I 的闭包，于是由(1)可得

$|I|-\varepsilon<|I_1|=m^*I_1\leqslant m^*I\leqslant m^*\bar{I}=|\bar{I}|=|I|$. 这样，对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$|I|-\varepsilon<m^*I\leqslant|I|.$$

因此

$$m^*I=|I|.$$

由例 1 与例 2 容易推知区间[0,1]是不可数集.

外测度可以看作区间长度概念的扩充. 它的优点在于对每一个 R 中的集合，皆具有外测度. 但是它不满足有限可加性和可数可加性. 因此我们希望在外测度的基础上建立一个具有可数可加性的测度. 一个想法是在 R 的全体子集组成的集族$\mathscr{P}$(R)中，按照一定的条件选出 R 的“相当多”的子集，在由这些子集组成的集族$\mathscr{L}$($\subset\mathscr{P}$(R))上，定义集合的测度就是它的外测度. 这样，我们的问题归结为：在什么条件下选出的集族$\mathscr{L}$上的测度满足可数可加性？

考虑 $E\subset\mathbb{R}$，对任意的 $T\subset\mathbb{R}$，有

$$T=(T\cap E)\cup(T\cap E^c),$$

即 T 可以表示为两个互不相交的集合 $T\cap E$ 与 $T\cap E^c$ 之并．这使我们想到，如果它满足可加性的要求，我们寻求的条件应该是

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由此我们得到如下的定义．

定义 1.2 设 $E\subset\mathbb{R}$，若对任意的 $T\subset\mathbb{R}$，皆有

$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c). \tag{1.1}$$

则称 E 是 Lebesgue 可测集 (Lebesgue measurable set)，简称为 L 可测集或可测集．当 E 为可测集时，称 m^*E 为 E 的 Lebesgu 测度，简称为 L 测度或测度(measure)．记为 mE，即 $m^*E=mE$．

在定义 1.2 中，(1.1)式称为Carathéodory 判别法则或Carathéodory 条件．它似乎不具有直观性，初学的读者不容易一下理解它的实质．只有经过深入的研究和推证之后，才能知道这样定义的测度的确包含了 R 中的"相当多"的子集并且满足可数可加性．(见下一节的定理 2.7 和定理 2.17) 同时也就证实了按我们的设想给出的这个定义的合理性．

由定义 1.2 容易看出，数直线 R 与空集 $\varnothing$ 均是可测的．

习 题

1. 若 E_1 为[0,1]中无理数构成的集合，证明：

$$m^*E_1=1.$$

2. 若 $m^*A=0$，则对任意的集 B，必有 $m^*(A\cup B)=m^*B$．
3. 若 E 为有界集，则必有 $m^*E<+\infty$．
4. 若 $m^*E_i=0(i=1,2,\cdots)$，且 $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，则有 $m^*E=0$．
5. 设 $m^*E>0$，问 E 中是否必定含有区间？试举例说明．
6. 设 E 是 R 上的有界集合，若 $m^*E=p>0$，则对于任何满足 $0<q<p$ 的正数，必有 $E_1\subset E$，使 $m^*E_1=q$．

§ 2　可测集的性质

在上一节里，我们在 R 中引入了测度的概念，并且给出了集E可测的定义——定义 1.2. 下面我们来讨论可测集的性质. 在本节中，R 为基本集，而 R 的子集 E 的余集 $E^c=\mathrm{R}\setminus E$.

定理 2.1　E 是可测集的充分必要条件是对任意的集合 A 和 B，若 $A\subset E$ 且 $B\subset E^c$，则

$$m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B.$$

证明　必要性. 设 E 是可测集，由定义 1.2 知对任意的集 T，皆有 $m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$. 若 $A\subset E$，且 $B\subset E^c$，则 $B\cap E=\varnothing$，$A\cap E^c=\varnothing$，令 $T=A\cup B$，从而

$$T\cap E=(A\cap E)\cup(B\cap E)=A,$$
$$T\cap E^c=(A\cap E^c)\cup(\mathrm{B}\cap E^c)=B.$$

于是

$$m^*(A\cup B)=m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$
$$=m^*A+m^*B.$$

充分性. 对任意的集 T，令 $A=T\cap E$，$B=T\cap E^c$，则 $A\subset E$，$B\subset E^c$，且 $A\cup B=(T\cap E)\cup(T\cap E^c)=T$. 故

$$m^*T=m^*(A\cup B)=m^*A+m^*B$$
$$=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由此可知 E 可测. □

定理 2.2　E 是可测集的充分必要条件是它的余集 E^c 是可测集.

证明　必要性. 如果 E 是可测集，由定义 1.2 对任意的集合 T，有

(2.1)
$$m^*T=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

但是

(2.2) $$m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap (E^c)^c).$$

由(2.1)与(2.2)式知对任意的集T，都有

(2.3) $$m^*T=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap (E^c)^c).$$

由定义 1.2 知集E^c可测.

充分性. 设E^c可测，那末对任意的集T，(2.3)式成立. 注意到(2.2)式，我们得到(2.1)式成立. 由定义 1.2知E为可测集. □

定理 2.3 若E_1与E_2是可测集，则$E_1\cup E_2$也是可测集，且当$E_1\cap E_2=\varnothing$时，对任意的集T皆有

$$m^*[T\cap (E_1\cup E_2)]=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).$$

证明 我们先来证明$E_1\cup E_2$是可测集. 由于E_1是可测集，故对任意的集T，有

(2.4) $$m^*T=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c).$$

又由于E_2是可测集，故

$$m^*(T\cap E_1^c)=m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2^c].$$

把此式代入(2.4)式得到

(2.5) $$\begin{aligned}m^*T&=m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]\\&\qquad+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2^c]\\&=m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]\\&\qquad+m^*[T\cap (E_1\cup E_2)^c].\end{aligned}$$

由于E_1可测，且$T\cap E_1\subset E_1$，$(T\cap E_1^c)\cap E_2\subset E_1^c$，从定理 2.1 知

(2.6) $$\begin{aligned}&m^*(T\cap E_1)+m^*[(T\cap E_1^c)\cap E_2]\\&\quad=m^*[T\cap (E_1\cup (E_1^c\cap E_2))]\\&\quad=m^*[T\cap (E_1\cup E_2)].\end{aligned}$$

把(2.6)式代入(2.5)式得到

$$m^*T=m^*[T\cap (E_1\cup E_2)]+m^*[T\cap (E_1\cup E_2)^c].$$

于是我们证得$E_1\cup E_2$是可测的.

其次,由于E_1、E_2都是可测集,并且当$E_1\cap E_2=\varnothing$时,对于任意的集T,有$T\cap E_1\subset E_1$,$T\cap E_2\subset E_1^c$,由定理2.1得

$$\begin{aligned}m^*[T\cap(E_1\cup E_2)]&=m^*[(T\cap E_1)\cup(T\cap E_2)]\\&=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2).\quad\square\end{aligned}$$

推论 2.4 若$E_i(i=1,2,\cdots,n)$为可测集,则$\bigcup_{i=1}^{n}E_i$也是可测集,并且当$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j,j=1,2,\cdots,n)$时,对任意的集$T$有

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i).$$

特别地,当$T=\mathbf{R}$时,由上式得到

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*E_i.$$

或

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}mE_i.\qquad(\text{有限可加性}).$$

定理 2.5 若E_1,E_2是可测集,则$E_1\cap E_2$也是可测集.

证明 因$(E_1\cap E_2)^c=E_1^c\cup E_2^c$,由定理2.2知$E_1^c$和$E_2^c$都是可测集. 又由定理2.3知$E_1^c\cup E_2^c$也是可测集,故$(E_1\cap E_2)^c$是可测集. 再由定理2.2,$E_1\cap E_2$是可测集. □

定理 2.6 若E_1,E_2是可测集,则$E_1\setminus E_2$也是可测集.

证明 由于E_1,E_2是可测集,由定理2.2知E_2^c是可测集. 再由定理2.5知$E_1\cap E_2^c$也是可测集. 但是由于$E_1\cap E_2^c=E_1\setminus E_2$,故$E_1\setminus E_2$是可测集. □

定理 2.7 设$\{E_i\}(i=1,2,\cdots)$是一列可测集,则$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$是可测集,且

(2.7) $$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}mE_i.$$

若$\{E_i\}$是一列两两互不相交的可测集，则

(2.8) $$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}mE_i,\qquad \text{(可数可加性)}.$$

证明 (1) 设$\{E_i\}$是一列两两互不相交的可测集，我们首先证明$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$是可测集，且(2.8)式成立. 由推论2.4知，任给正整数n，$\bigcup_{i=1}^{n}E_i$都是可测集，并且对任意的集T

$$m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i).$$

于是

$$\begin{aligned}m^*T&=m^*\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)+m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)^c\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i)+m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\right)^c\right)\\&\geqslant\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i)+m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right).\end{aligned}$$

上面最后一个式子成立是由于外测度的单调性的缘故，令$n\to\infty$，则有

(2.9) $$m^*T\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right).$$

对(2.9)式右端第一项应用外测度的次可数可加性，我们得到

$$m^*T \geqslant m^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right).$$

另一方面，由于$T=\left(T\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)\cup\left(T\cap\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)^c\right)$，又有

$$m^*T \leqslant m^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right).$$

因此

$$m^*T = m^*\left(T \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c\right).$$

这就证明了$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$是可测集.

在(2.9)式中，当$T=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$时，$T\cap E_i=E_i$，故

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

另一方面，由外测度的次可数可加性，又有

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} mE_i.$$

因此(2.8)式成立.

(2) 设$\{E_i\}$是一列可测集. 我们可以把$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$表示为如下的两两互不相交的可测集

$$E_1, E_2\setminus E_1, \cdots, E_n\setminus\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right), \cdots$$

之并，若令$E_0=\varnothing$，则有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E_n \setminus \left(\bigcup_{i=0}^{n-1} E_i\right)\right).$$

由推论 2.4、定理 2.6 及(1)中的证明知 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 可测. 再由外测度的次可数可加性,得到(2.7)式成立. □

定理 2.8 设 $\{E_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ 是一列可测集,则 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 也是可测集.

证明 由于 $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i\right)^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i^c$, 应用定理 2.2 及定理 2.7 立即得证. □

定理 2.9 (1) 设 $\{E_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ 是一列递增的可测集,即

$$E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_i \subset \cdots,$$

则 $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集,且

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

(2) 设 $\{E_i\}$ $(i=1,2,\cdots)$ 是一列递减的可测集,即

$$E_1 \supset E_2 \supset \cdots \supset E_i \supset \cdots,$$

则 $E = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ 是可测集,且当 $mE_1 < +\infty$ 时,

$$mE = \lim_{n\to\infty} mE_n.$$

证明 (1) 令 $E_0 = \varnothing$. E 可表示为

$$E = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus E_2) \cup \cdots \cup (E_n \setminus E_{n-1}) \cup \cdots$$

$$=\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_i\setminus E_{i-1}),$$

其中$\{E_i\setminus E_{i-1}\}$是一列两两互不相交的可测集，应用定理 2.7 得到

$$mE=\sum_{i=1}^{\infty}m\ (E_i\setminus E_{i-1})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m(E_i\setminus E_{i-1})$$

$$=\lim_{n\to\infty}m\left(\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\setminus E_{i-1})\right)=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

(2) 因为$\{E_i\}$递减，所以$\{E_1\setminus E_i\}$递增. 由于$E=\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i$，由(1)的证明，有

$$\lim_{n\to\infty}m(E_1\setminus E_n)=m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(E_1\setminus E_i)\right)=m(E_1\setminus E). \tag{2.10}$$

易见

$$mE_1=mE+m(E_1\setminus E),$$
$$mE_1=mE_n+m(E_1\setminus E_n).$$

由于$mE_1<+\infty$，则$m(E_1\setminus E)=mE_1-mE$，$m(E_1\setminus E_n)=mE_1-mE_n$. 于是由(2.10)式得到

$$mE_1-mE=\lim_{n\to\infty}(mE_1-mE_n)=mE_1-\lim_{n\to\infty}mE_n.$$

故

$$mE=\lim_{n\to\infty}mE_n.$$ □

必须注意的是在定理2.9(2)中，条件$mE_1<+\infty$是不可少的. 如果去掉这个条件，则此命题便不再成立.

上面我们讨论了可测集的一些性质. 但是我们还没有讨论哪些集是可测的. 下面我们就来讨论这些问题.

定理 2.10 区间$(a,+\infty)$是可测集.

证明 设T是任意一集，令 $A_1=T\cap(a,+\infty)$，$A_2=T\cap(-\infty,a]$．我们只需证明 $m^*T=m^*A_1+m^*A_2$．因为显然有 $m^*T\leqslant m^*A_1+m^*A_2$．故只须证明

$$m^*A_1+m^*A_2\leqslant m^*T. \tag{2.11}$$

若 $m^*T=+\infty$，则(2.11)式当然成立．现设 $m^*T<+\infty$．由外测度的定义，对任意的 $\varepsilon>0$，有一列覆盖T的开区间$\{I_n\}$，使得

$$\sum_n |I_n|\leqslant m^*T+\varepsilon,$$

令 $I'_n=I_n\cap(a,+\infty)$，$I''_n=I_n\cap(-\infty,a]$则 I'_n与 I''_n也是区间（或者是空集)，并且

$$|I_n|=|I'_n|+|I''_n|=m^*I'_n+m^*I''_n.$$

由于 $A_1\subset\bigcup I'_n$及 $A_2\subset\bigcup I''_n$，我们有

$$m^*A_1\leqslant m^*\left(\bigcup_n I'_n\right)\leqslant\sum_n m^*I'_n,$$

$$m^*A_2\leqslant m^*\left(\bigcup_n I''_n\right)\leqslant\sum_n m^*I''_n.$$

于是

$$\begin{aligned} m^*A_1+m^*A_2 &\leqslant\sum_n(m^*I'_n+m^*I''_n)\\ &\leqslant\sum_n|I_n|\\ &\leqslant m^*T+\varepsilon. \end{aligned}$$

由 ε 的任意性，得到(2.11)式． □

推论 2.11 (1) 区间$[a,+\infty)$、$(-\infty,a)$、$(-\infty,a]$皆为可测集．

(2) 若区间 $I=(a,b)$(或 $I=[a,b)$、$I=(a,b]$、$I=[a,b]$．这里 $a<b$)，则I是可测集，且有 $mI=b-a$.

证明 (1) 由于$[a,+\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},+\infty\right)$. 由定理 2.10 及定理 2.8 知$[a,+\infty)$是可测集. 而$(-\infty,a)$与$(-\infty,a]$分别是$[a,+\infty)$与$(a,+\infty)$的余集,故它们也是可测集.

(2) 因为$(a,b)=(-\infty,b)\cap(a,+\infty)$. 所以$(a,b)$是可测集. 同理,所有的区间 I 皆为可测集. 并且由 §1 中例 2 知道:

$$mI=m^*I=|I|=b-a. \qquad \square$$

推论 2.12 $\mathbb{R}$ 中的开集与闭集皆为可测集.

证明 因为 $\mathbb{R}$ 中的开集可以表示为至多可数个互不相交的开区间之并,所以开集皆为可测集. 而 $\mathbb{R}$ 中的闭集 F 是开集F^c的余集. 即 $F=(F^c)^c$. 故知 $\mathbb{R}$ 中的闭集亦为可测集. $\square$

定理 2.13 若 $m^*E=0$,则 E 是可测集,且 $mE=m^*E=0$.

证明 设 T 是任意的一集,由于 $T\cap E\subset E$. 由

$$0\leqslant m^*(T\cap E)\leqslant m^*E=0,$$

可得

$$m^*(T\cap E)=0.$$

又由 $T\cap E^c\subset T$,故

$$m^*T\geqslant m^*(T\cap E^c)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c).$$

由外测度的次可加性知,相反的不等式成立. 因此 E 是可测集. 且 $mE=m^*E=0$. $\square$

当 $mE=0$ 时,我们称 E 为零测度集 (set of measure zero). 由 §1 中的例 1 可知, $\mathbb{R}$ 中的有限集或可数集都是零测度集. 但是零测度集并不只是有限集或可数集.

例 1 若 F 为 Cantor 闭集,$G_0=[0,1]\backslash F$ (于是 G_0为开集),则有 $mF=0$.

事实上,因为 $mG_0=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2^2}{3^3}+\cdots+\frac{2^n}{3^{n+1}}+\cdots=1$, 所以

$mF=1-mG_0=1-1=0.$

例 1 说明了基数为$\aleph$的点集F，其测度也可以为零.

对于有界可测集E来讲，总有$mE<+\infty$. 若E为无界可测集，则其测度既可以是有限的，也可以是$+\infty$. 例如全体实数的集合$\mathbf{R}$，就有$m\mathbf{R}=+\infty$；而全体有理数的集合$\mathbf{Q}$、全体整数的集合$\mathbf{Z}$，虽然都是无界集，它们的测度却是零.

定义 2.14 若集合G可以表示为一列开集$\{G_i\}(i=1,2,\cdots)$的交集，即$G=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}G_i$，则称$G$为$G_\delta$型集($G_\delta$-set). 若集合$F$可以表示为一列闭集$\{F_i\}(i=1,2,\cdots)$的并集，即$F=\bigcup\limits_{1}^{\infty}F_i$，则称$F$为$F_\sigma$型集.（$F_\sigma$-set).

定义 2.15 由开集出发，凡是用取余集、取有限或可数个集的并或交而得到的集，称为 Borel 集(Borel set).

为了便于读者更好地理解 Borel 集的实质. 我们介绍一个更一般的术语.

定义 2.16 设X是一集，$\mathscr{A}$是由X的子集组成的集族. 若$\mathscr{A}$具有如下的性质:

(1) $X\in\mathscr{A}$.

(2) 若$A\in\mathscr{A}$，则$A^c\in\mathscr{A}$(这里$A^c=X\backslash A$).

(3) 若$A_n\in\mathscr{A}(n=1,2,\cdots)$，则$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{A}$.

则称$\mathscr{A}$是X中的一个σ-代数(σ-algebra).

当$\mathscr{A}$是X中的一个σ-代数时，我们容易得到如下的结论:

$\varnothing\in\mathscr{A}$；$\mathscr{A}$中有限个元的并仍在$\mathscr{A}$中；$\mathscr{A}$中有限个或可数个元的交仍在$\mathscr{A}$中；$\mathscr{A}$中两个元的差仍在$\mathscr{A}$中.

若 $\mathscr{F}$ 是由 X 的子集组成的任一集族，令

$$\Omega=\{\mathscr{A}\mid\mathscr{A}\text{是 }X\text{ 中的 }\sigma\text{-代数且 }\mathscr{F}\subset\mathscr{A}\}.$$

由于 X 的全体子集组成的集族 $\mathscr{P}(X)$ 是包含 $\mathscr{F}$ 的σ-代数. 故 $\Omega\neq\varnothing$. 令

$$\mathscr{A}^*=\bigcap\{\mathscr{A}\mid\mathscr{A}\in\Omega\},$$

则 $\mathscr{F}\subset\mathscr{A}^*$. 并且容易验证 $\mathscr{A}^*$ 是一个 σ-代数. 因此，$\mathscr{A}^*$ 是包含$\mathscr{F}$ 的最小 σ-代数. 这时，我们也称 $\mathscr{A}^*$ 是由 $\mathscr{F}$ 生成的 σ-代数(σ-algebra generated by $\mathscr{F}$).

回到本节的讨论中来，我们用 $\mathscr{T}_u$ 表示 R 中所有开集的全体. 用 $\mathscr{B}$ 表示 R 中所有 Borel 集的全体. 那末 $\mathscr{B}$ 就是由 $\mathscr{T}_u$生成的 σ-代数.

由上面的讨论知：开集，闭集、G_δ 集和 F_σ 集都是 Borel 集. 并且有如下的结论：

定理 2.17 R 中的 Borel 集都是可测集.

从上面的讨论知道，R 中的 Lebesgue 可测集的全体包含了所有的 Borel 集. 接着，我们应当考虑如下的问题：除了 Borel 集外，是否还有其它的可测集？或者说 Lebesgue 可测集的全体，除了所有的 Borel 集之外还包含一些什么样的集？定理 2.18 给出了回答.

定理 2.18 设 E 是一个给定的集，则下列结论等价：

(a) E 是可测集；

(b) 对任意的$\varepsilon>0$，存在开集 G，使得 $G\supset E$，且 $m^*(G\setminus E)<\varepsilon$.

(c) 对任意的 $\varepsilon>0$，存在闭集 F，使得 $F\subset E$，且 $m^*(E\setminus F)<\varepsilon$.

(d) 存在 G_δ 型集 G，使得 $G\supset E$，且 $m^*(G\setminus E)=0$.

(e) 存在 F_σ 型集 F，使得 $F\subset E$，且 $m^*(E\setminus F)=0$.

证明 (a)⇒(b)：先设 $m^*E<+\infty$. 由外测度的定义，存在一列开区间$\{I_i\}$，使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i\supset E$，且

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*E+\varepsilon.$$

令 $G=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$m^*E\leqslant m^*G\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*I_i=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|<m^*E+\varepsilon.$$

再由所设 $m^*E<+\infty$ 可得$m^*G<m^*E+\varepsilon<+\infty$，因此$m^*G-m^*E<\varepsilon$，从而

$$m^*(G\backslash E)<\varepsilon.$$

其次，设 $m^*E=+\infty$，这时 E 必为无界集，但它总可以表示成可数个互不相交的有界可测集的并：$E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n(m^*E_n<+\infty)$. 对每一个 E_n 应用上面的结果，可以找到开集 $G_n\supset E_n$，使 G_n 满足条件 $m^*(G_n\backslash E_n)<\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

令 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$，则 G 为开集，$G\supset E$，且

$$G\backslash E=\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\backslash\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n\backslash E_n).$$

因此

$$m^*(G\backslash E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(G_n\backslash E_n)<\varepsilon.$$

(b)⇒(d)：取 $\varepsilon_n=\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$. 由(b) 知存在开集 $G_n\supset E$，使 $m^*(G_n\backslash E)<\frac{1}{n}$. 令 $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$，则 G 为 G_δ 型集，$G\supset E$，且

$$m^*(G\backslash E)\leqslant m^*(G_n\backslash E)<\frac{1}{n}\quad(n=1,2,\cdots).$$

故

$$m^*(G\backslash E)=0.$$

(d)⇒(a)：设存在 G_δ 型集G，使得 $G\supset E$，且$m^*(G\backslash E)=0$. 而 G 与 $G\backslash E$ 均为可测集，故 $E=G\backslash(G\backslash E)$是可测集.

(a)⇒(c)：设 E 是可测集，故 E^c 亦为可测集. 由于(a)成立已推出(b) 成立，故对任意的 $\varepsilon>0$，存在开集 G，使 $G\supset E^c$，且 $m(G\backslash E^c)<\varepsilon$. 注意到

$$G\backslash E^c=G\cap E=E\backslash G^c.$$

令 $F=G^c$，则 F 为闭集，且 $F\subset E$. 因此

$$m(E\backslash F)=m(G\backslash E^c)<\varepsilon.$$

(c)⇒(e)：对任意的正整数 n，由(c)知存在闭集F_n使$F_n\subset E$，且有

$$m^*(E\backslash F_n)<\frac{1}{n}.$$

令 $F=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，则 F 为 F_σ 型集. $F\subset E$，且

$$m^*(E\backslash F)=m^*\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(E\backslash F_n)\right)\leqslant m^*(E\backslash F_n)<\frac{1}{n}.$$

故有

$$m^*(E\backslash F)=0.$$

(e)⇒(a)：设存在 F_σ 型集 F，使 $F\subset E$，且有 $m^*(E\backslash F)=0$.

而 F 与 $E\backslash F$ 均为可测集．故 $E=(E\backslash F)\cup F$ 是可测集． □

定理 2.18 表明：任何一个 Lebesgue 可测集 E 都可以表示为 $E=G\backslash N$ 或 $E=F\cup N$ 的形式．其中 G 是 G_δ 型集、F 是 F_σ 型集、N 是零测度集．或者说，任何一个 Lebesgue 可测集是一个 Borel 集与零测度集之差，同时它又是一个 Borel 集与零测度集之并．

我们用记号 $\mathscr{P}(\mathbf{R})$ 表示所有 $\mathbf{R}$ 的子集组成的集族，$\mathscr{L}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中的 Lebesgue 可测集的全体组成的集族，$\mathscr{B}$ 表示 $\mathbf{R}$ 中的 Borel 集的全体组成的集族．从上面的讨论已经看到，$\mathscr{L}$ 中包含了 $\mathbf{R}$ 的"相当多"的子集．但是我们还应当指出下面两点：

(1) $\mathscr{L}\subsetneqq\mathscr{P}(\mathbf{R})$，或者说在 $\mathbf{R}$ 中 Lebesgue 不可测集是存在的．实际上，对于任何一个具有正测度的可测集 $E(mE>0)$，应用选择公理可以构造出一个含于 E 的 Lebesgue 不可测集．Lebesgue 不可测集通常被用来构造某些反例，这就有助于我们理解理论上不同概念之间的差异．

(2) $\mathscr{B}\subsetneqq\mathscr{L}$，或者说不是 Borel 集的 Lebesgue 可测集是存在的．我们可以应用 Lebesgue 不可测集的存在性来构造这样的例子．

由于本书的篇幅所限，说明上述两个问题的例子就不在这里给出了，读者可以从很多较为详细的书中找到这些例子．

习　题

1. 零测度集的闭包是否一定是零测度集？
2. 证明可数个零测度集的并与交都是零测度集．
3. 设 E_1 与 E_2 都是有界可测集，且 $E_2\subset E_1$，则
$$m(E_1\backslash E_2)=mE_1-mE_2.$$
4. 若 E_1 与 E_2 都是可测集，则
$$mE_1+mE_2=m(E_1\cup E_2)+m(E_1\cap E_2).$$

5. 举例说明定理 2.9(2)中，$mE_1<+\infty$的条件是不可缺少的.

6. 设 $E\subset \mathbf{R}$. 证明

$$m^*E=\inf\{mG \mid G \text{ 是 } \mathbf{R} \text{ 中的开集且 } E\subset G\}.$$

7. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是有限个互不相交的可测集，且 $E_k\subset A_k(k=1,2,\cdots,n)$. 证明

$$m^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)=\sum_{k=1}^{n} m^*E_k.$$

8. 设 $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$. 证明

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\lim_{n\to\infty} m^*E_n.$$

9. 试作一个无处稠密的闭集 $F\subset[0,1]$，使得 $mF>0$.

10. 测度为零的无处稠密集 E 的闭包 $\bar{E}$ 是否也是零测度集?

11. 设$[0,1]$上的可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} mE_i>n-1.$$

试证明 $m\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right)>0$.

§ 3 可测函数

在实直线或者说实数集 $\mathbf{R}$ 上添加两个元素 $-\infty$ 和 $+\infty$，若记 $\mathbf{R}^\#=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$，则 $\mathbf{R}^\#$ 称为扩张的实直线 (extended real line)，或称为扩张的实数集. 我们把$-\infty$ 和$+\infty$ 看作广义实数，对任意的实数 a 都有$-\infty<a<+\infty$.

我们在本节中所讨论的函数，若无特别的说明，总认为它是定义在 $\mathbf{R}$ 的某一子集 E 上且在 $\mathbf{R}^\#$ 中取值的函数. 也就是说，允许函数以$+\infty$ 或 $-\infty$ 为其值. 由于$+\infty$ 和 $-\infty$ 不是真正的实数. 因此，包括$+\infty$ 和 $-\infty$ 在内的实数运算应当遵循如下的规定:

(1) 对任意的实数 a

$$a+(\pm\infty)=(\pm\infty)+a=(\pm\infty)-a=a-(\mp\infty)=\pm\infty,$$

$$(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty,$$

$$(+\infty)(+\infty)=(-\infty)(-\infty)=+\infty,$$

$$\frac{a}{\pm\infty}=0.$$

(2) 若实数 $a\neq 0$

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\frac{\pm\infty}{a}=\pm\infty \qquad (a>0),$$

$$a(\pm\infty)=(\pm\infty)a=\frac{\pm\infty}{a}=\mp\infty \qquad (a<0),$$

$$(-\infty)(+\infty)=(+\infty)(-\infty)=-\infty.$$

(3) 下列的运算式没有意义

$$(\pm\infty)-(\pm\infty),\quad (\pm\infty)+(\mp\infty),$$

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty},\qquad \frac{\pm\infty}{0},\qquad \frac{a}{0}(a\text{ 为实数}).$$

设 E 是可测集，f 是定义在 E 上的函数. 令

$$E(f>\alpha)=\{x\in E\mid f(x)>\alpha\},$$

即 $E(f>\alpha)$是 E 中满足 $f(x)>\alpha$ 的点 x 的全体. 在图 3.1 中，当 $E=[a,b]$时，我们有 $E(f>\alpha)=E_1\cup E_2$.

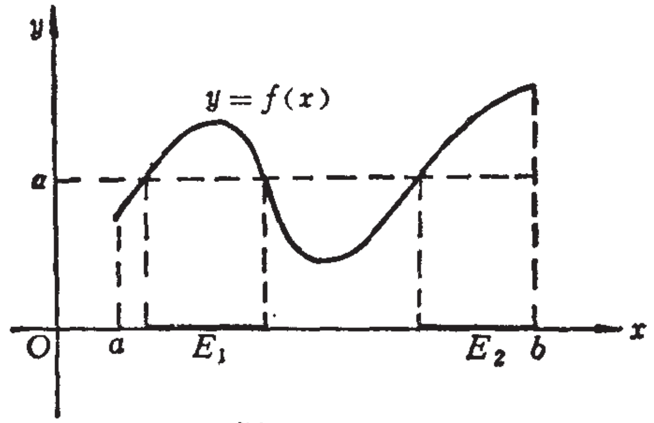


图 3.1

同样，$E(f\geqslant\alpha)$、$E(f\leqslant\alpha)$、$E(f<\alpha)$、$E(\alpha\leqslant f<\beta)$等记号分别表示 E 中满足 $f(x)\geqslant\alpha, f(x)\leqslant\alpha, f(x)<\alpha, \alpha\leqslant f(x)<\beta$ 的点 x 的

全体所组成的集.

当我们在讨论 E 上定义的函数 f 时，我们总是把 E 看作基本集.

定理 3.1 设 f 是定义在可测集 E 上的函数，则下列结论等价.

(1) 对任意的实数 α, $E(f>\alpha)$是可测集.

(2) 对任意的实数 α, $E(f\geqslant\alpha)$是可测集.

(3) 对任意的实数 α, $E(f<\alpha)$是可测集.

(4) 对任意的实数 α, $E(f\leqslant\alpha)$是可测集.

(5) 对任意的实数 α 与 β, $E(\alpha\leqslant f<\beta)$是可测集，并且$E(f=+\infty)$是可测集.

证明 因为$E(f>\alpha)=[E(f\leqslant\alpha)]^c$,所以(1) 与(4)等价. 同理可知(2)与(3)等价.

由于 $E(f\geqslant\alpha)=\bigcap_{n=1}^{\infty} E\left(f>\alpha-\frac{1}{n}\right)$, 当(1) 成立时，$E(f\geqslant\alpha)$是一列可测集之交，故 $E(f\geqslant\alpha)$可测.

另外 $E(f>\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E\left(f\geqslant\alpha+\frac{1}{n}\right)$, 当(2)成立时，$E(f>\alpha)$是一列可测集之并，故 $E(f>\alpha)$ 是可测集. 于是我们证得(1)与(2)等价. 下面我们再证(2)与(5)等价.

设(2)成立，于是(3)也成立. 由于 $E(\alpha\leqslant f<\beta)=E(\alpha\leqslant f)\cap E(f<\beta)$,其右端是两个可测集之交，故 $E(\alpha\leqslant f<\beta)$是可测集，又由于

$$E(f=+\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f\geqslant n), \tag{3.1}$$

其右端是一列可测集之交，故 $E(f=+\infty)$是可测集.

现设(5)成立. 由于$E(f\geqslant\alpha)=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E(\alpha\leqslant f<\alpha+n)\right)\cup E(f=+\infty)$,其右端是一列可测集之并,故$E(f\geqslant\alpha)$是可测集. □

定义 3.2 设f是可测集E上的函数,若f满足定理3.1中的五个等价条件之一,则称f为E上的可测函数(measurable function)或称函数f是可测的.

我们从定理3.1知道,若f在E上可测,则对于任意实数α,集$E(f=\alpha)$总是可测的. 事实上,我们只要注意到:

$$E(f=\alpha)=E(f\geqslant\alpha)\backslash E(f>\alpha).$$

立即就得到$E(f=\alpha)$是可测集.

当$\alpha=\pm\infty$时,由于(3.1)式成立以及

$$E(f=-\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}E(f\leqslant -n),$$

故$E(f=+\infty)$与$E(f=-\infty)$也都是可测集.

设E、F是可测集且$F\subset E$. 若f是E上的可测函数,则f(作为F上的函数,或者严格地说f在F上的限制$f|_F$)是F上的可测函数. 因为对任意的实数α,有

$$F(f>\alpha)=E(f>\alpha)\cap F.$$

而等式的右端是两个可测集之交.

例1 区间[0, 1]上的Dirichlet函数$D(x)$是可测的. 实际上,由$D(x)$的定义

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{若 }x\text{ 是}[0,1]\text{中的有理数},\\0,\text{若 }x\text{ 是}[0,1]\text{中的无理数}.\end{cases}$$

对任何实数α

$$E(D>\alpha)=\begin{cases}\varnothing, & \text{若 }\alpha\geqslant 1,\\ [0,1]\cap\mathbb{Q}, & \text{若 }0\leqslant\alpha<1,\\ [0,1], & \text{若 }\alpha<0.\end{cases}$$

都是可测集.故 $D(x)$是$[0,1]$上的可测函数.

例2 设 $E\subset\mathbf{R}$,我们称函数

$$\mathbf{1}_E(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in E,\\ 0, & 若\ x\in\mathbf{R}\setminus E.\end{cases}$$

为集 E 的特征函数(characteristic function). 不难证明,当且仅当 E 是可测集时,$\mathbf{1}_E$ 是$\mathbf{R}$上的可测函数.

例3 定义在零测度集E上的任何函数 f 都是可测的.

事实上,对任何实数 α,皆有 $E(f>\alpha)\subset E$. 于是

$$0\leqslant m^*E(f>\alpha)\leqslant mE=0.$$

故 $E(f>\alpha)$是测度为零的可测集. 因此 f 可测.

可测函数具有如下的性质

定理 3.3 设 f、g 是可测集 E 上的可测函数,c 为常数. 则 $f+c$、cf、$f+g$、$f-g$、f^2 和 fg 都是E上的可测函数.

证明 对任意的实数 α,因为

$$E(f+c<\alpha)=E(f<\alpha-c).$$

所以当 f 是可测函数时,$f+c$ 也是可测函数. 同理可证 cf 是可测函数.

若 $f+g<\alpha$,则 $f<\alpha-g$. 由有理数的稠密性知,存在有理数 r,使 $f<r<\alpha-g$.
于是

$$E(f+g<\alpha)=\bigcup_{r\in\mathbf{Q}}[E(f<r)\cap E(g<\alpha-r)].$$

由于有理数的全体 $\mathbf{Q}$ 是可数集,故 $E(f+g<\alpha)$是可测集. 这就证明了 $f+g$ 是可测函数.

因为$f-g=f+(-g)$,所以得到 $f-g$ 是可测函数.

考虑 f^2. 当 $\alpha\geqslant0$ 时,

$$E(f^2>\alpha)=E(f>\sqrt{\alpha})\cup E(f<-\sqrt{\alpha})$$

为可测集.

当 $\alpha<0$ 时,

$$E(f^2>\alpha)=E$$

也是可测集. 因此 f^2 是可测函数.

由 $fg=\frac{1}{2}[(f+g)^2-f^2-g^2]$, 可知 fg 是可测函数. □

定理 3.4 设 f 是可测集 E 上的可测函数, $f(x)\neq 0\ (x\in E)$. 则 $\frac{1}{f}$ 也是 E 上的可测函数.

证明 对任意的实数 α,

$$E\left(\frac{1}{f}>\alpha\right)=\begin{cases} E\left(0<f<\frac{1}{\alpha}\right), & \text{若 } \alpha>0, \\ E(f>0), & \text{若 } \alpha=0, \\ E(f>0)\cup E\left(f<\frac{1}{\alpha}\right), & \text{若 } \alpha<0. \end{cases}$$

由于上式右端的集都是可测的, 故 $E\left(\frac{1}{f}>\alpha\right)$ 是可测集. 因此, $\frac{1}{f}$ 是可测函数. □

定理 3.5 设 $\{f_n\}$ 是一列定义在可测集 E 上的可测函数, 则 $\sup\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, $\inf\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, $\sup\limits_{n\in N}f_n$, $\inf\limits_{n\in N}f_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 和 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 都是可测函数.

证明 令 $h=\sup\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, 即对每一个 $x\in E$, 有

$$h(x)=\sup\{f_1(x),\cdots,f_n(x)\}.$$

我们得到 $E(h>\alpha)=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E(f_i>\alpha)$. 因此, 由每一个 f_i 的可测性可以推出 $E(h>\alpha)$ 可测. 故 $\sup\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是可测函数.

同样, 若令 $g=\inf\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$, 则 $E(g\geqslant\alpha)=\bigcap\limits_{i=1}^{n}E(f_i\geqslant\alpha)$,

从而推出 $\inf\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是可测函数.

若令 $\xi=\sup\limits_{n\in N}f_n$，则 $E(\xi>\alpha)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E(f_n>\alpha)$. 因此 ξ 是可测函数. 同理可得 $\inf\limits_{n\in N}f_n$ 也是可测函数.

因为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\inf\limits_{n}\sup\limits_{k\geq n}f_k$，故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 是可测的. 同理，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n=\sup\limits_{n}\inf\limits_{k\geq n}f_k$，故 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}f_n$ 也是可测的. □

推论 3.6 若 f 是可测集 E 上的可测函数. 则 $|f|$ 也是 E 上的可测函数.

证明 因为 $|f|=\sup\{f,-f\}$. 由定理 3.5，所以 $|f|$ 也是 E 上的可测函数. □

推论 3.7 若 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数，且对每一个 $x\in E$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$，则 f 也是 E 上的可测函数.

定义 3.8 设 E 是可测集，$p(x)$ 是与 E 中的点 x 有关的命题，若除去 E 的某个零测度集 A 之外，$p(x)$ 在 $E\setminus A$ 上处处成立，则称 $p(x)$ 在 E 上几乎处处(almost everywhere)成立. 记为 $p(x)$ 在 E 上成立 $(a.e.)$.

例如，若 $E(f\neq g)=\{x\in E\mid f(x)\neq g(x)\}$ 是零测度集，则我们说在 E 上 $f(x)=g(x)(a.e.)$，或者简单地说 $f=g(a.e.)$. 因此，我们可以说例 1 中的 Dirichlet 函数在 $[0,1]$ 上几乎处处等于零. 即在 $[0,1]$ 上 $D(x)=0(a.e.)$. 又如，在 E 上 $f(x)\leqslant g(x)(a.e.)$（或者 $f\leqslant g(a.e.)$）表明 E 上满足 $f(x)>g(x)$ 的点 x 的全体是一个零测度集.

对于集 E 上的一列函数 $\{f_n\}$，若对于每一个 $x\in E$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 我们就称 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 f.

若除去一个 E 的零测度的子集 A 之外，$\{f_n\}$ 在 $E\setminus A$ 上处处收敛于 f，我们就称 $\{f_n\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 f，记为在 E 上

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)(a.e.)$,或者记为在$E$上$\lim\limits_{n\to\infty} f_n=f(a.e.)$. 这时我们也可以说，在$E$上使得$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$ 的点x的全体是一个零测度集.

引理 3.9 若f是可测集E上的可测函数，且在E上有$f=g(a.e.)$,则g也是E上的可测函数.

证明 由假设$E_0=E(f\neq g)$是零测度集. 令$A=E\setminus E_0$，对任意的实数α有

$$E(g>\alpha)=A(f>\alpha)\cup E_0(g>\alpha).$$

由于f是可测集E上的可测函数，知f是可测集A上的可测函数,因此$A(f>\alpha)$是可测集. 而$E_0(g>\alpha)$是零测度集E_0的子集,故它也是可测集. 因此$E(g>\alpha)$是可测集. 这就证明了g是E上的可测函数. □

引理 3.9 表明,可测函数在一个零测度集上改变定义之后,得到的函数仍然是可测的. 这样，当我们把可测函数的运算改为几乎处处成立时,相应的结论仍然是成立的.

下面我们引入简单函数的概念.

定义 3.10 设f是定义在可测集E上的函数. 若E可以分解为有限个互不相交的可测集$E_1,E_2,\cdots,E_n$之并,且在每一个E_i上f取常数值$c_i(i=1,2,\cdots,n)$,则f称为E上的简单函数(simple function).

若把E看作基本集，E的子集A的特征函数1_A定义为

$$1_A(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\in A,\\ 0, & 若\ x\in E\setminus A.\end{cases}$$

那末在定义 3.10 中的简单函数f可以表示为

$$f=\sum_{i=1}^{n} c_i 1_{E_i}.$$

由简单函数的定义易知：

(1) 两个简单函数的和与乘积仍然是简单函数.

(2) 简单函数是可测函数.

由推论 3.7 可知，一列简单函数的极限是可测函数. 下面我们要证明：可测函数可以表示为一列简单函数的极限. 为了证明的需要，我们将可测函数作如下的分解.

设 f 是可测集 E 上的可测函数. 我们分别定义函数 f^+ 与 f^- 使得对每一个 $x\in E$, 有

$$f^+(x)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{若 } f(x)<0.\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases}-f(x), & \text{若 } f(x)\leqslant 0,\\ 0, & \text{若 } f(x)>0.\end{cases}$$

则称 f^+ 为 f 的正部(positive part)，称 f^- 为 f 的负部(negative part). 不难看出：

$$f=f^+-f^-,$$

$$f^+=\sup(f,0)\geqslant 0,$$

$$f^-=\sup(-f,0)=-\inf(f,0)\geqslant 0.$$

由定理 3.5 知, f^+ 和 f^- 都是 E 上的可测函数.

定理 3.11 (1) 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数, 则存在一列非负递增的简单函数 $\{\varphi_n\}$:

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots,\quad (x\in E).$$

使得对每一个 $x\in E$, 皆有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

(2) 设 f 是可测集 E 上的可测函数, 则存在一列简单函数 $\{\varphi_n\}$, 使得对每一个 $x\in E$, 皆有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

证明 (1) 设 f 是非负可测函数，对每一个正整数 n，定义函数 φ_n 使得

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{2^n}, & 若\ x\in E\left(\dfrac{k-1}{2^n}\leqslant f<\dfrac{k}{2^n}\right), k=1,2,\cdots,n2^n.\\ n, & 若\ x\in E(f\geqslant n).\end{cases}$$

则 φ_n 是定义在 E 上的简单函数，且

$$0\leqslant\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots,\quad (x\in E).$$

下面我们来证明，对于每一个 $x\in E$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

事实上，若有$x_0\in E$，使$f(x_0)=+\infty$，由 $\varphi_n(x)$的定义知 $\varphi_n(x_0)=n(n=1,2,\cdots)$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=+\infty=f(x_0).$$

若有 $x_0\in E$，使 $f(x_0)<+\infty$，则存在正整数 n_0，使得 $f(x_0)<n_0$. 故当 $n>n_0$ 时，有

$$0\leqslant f(x_0)-\varphi_n(x_0)<\frac{1}{2^n}.$$

因此有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0).$$

(2) 设 f 是一般可测函数，则 $f=f^+-f^-$，这里 f^+ 与 f^- 都是可测函数. 故由(1)知，存在简单函数列$\{\varphi_n\}$与$\{\psi_n\}$，使得对每一个 $x\in E$，皆有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f^+(x)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=f^-(x)$. 令 $h_n=\varphi_n-\psi_n$，则$\{h_n\}$是简单函数列. 且对每一个 $x\in E$，有

$$\lim_{n\to\infty}h_n(x)=\lim_{n\to\infty}[\varphi_n(x)-\psi_n(x)]=f^+(x)-f^-(x)=f(x).\quad\square$$

显然，定理 3.11(2) 的逆定理成立. 因此我们又有下面的结论:

f 是可测集 E 上的可测函数的充分必要条件是它可以表示为一列简单函数的极限.

从这个结论可知,可测函数可以用简单函数来逼近,这不仅是一个重要的结论,而且在研究可测函数的性质时,还给予我们一种思考问题的方法. 要研究可测函数是否具有某种性质,可以先研究简单函数是否具有这种性质. 然后通过取极限的过程,分析、判断能否过渡到对可测函数的研究之中. 这种思考问题的方法,在许多场合下是行之有效的. 例如在下一节中Лузин 定理的证明,以及在下一章建立 Lebesgue 积分理论中,我们将看到这种思考问题的方法的成功应用.

习 题

1. 证明:在区间 $[a,b]$ 上定义的单调函数必为可测函数.

2. 设 f,g 是可测集 E 上的可测函数. 证明 $E(f>g)$ 是可测集.

3. 证明: $f(x)$ 可测的充分必要条件是 $f(x)$ 可以表示为两个非负可测函数之差.

4. 证明 f 在可测集 E 上是可测函数的充分必要条件是,对任意的有理数 r, $E(f>r)$ 是可测集.

5. 设 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列可测函数,且在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ $(a.e.)$,则 f 也是 E 上的可测函数.

6. 可测集 E 上的连续函数 f 必定可测.

7. 设 E 为可测集,若 $|f|$ 在 E 上可测,问 f 在 E 上是否一定可测?

8. 设 f 是可测集 E 上的有限可测函数, A 是 $\mathbb{R}$ 中的任意一个开集(或闭集,或 G_δ 型集,或 F_σ 型集). 证明集 A 的原象 $f^{-1}(A)$ 是 E 的可测子集.

9. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, g 是可测集 E 上的有限可测函数,则复合函数 $f\circ g$ 是 E 上的可测函数.

§4 可测函数的几个重要定理

在数学分析中，函数的连续性与函数列的一致收敛都是十分重要的概念．对于可测函数是否也有与数学分析中类似的关系呢？本节中我们要给出两个重要的关于可测函数的基本定理．粗略地讲它们分别表示了：每一个收敛的可测函数列“差不多”是一致收敛的；每一个可测函数“差不多”是连续的．这种直观的说法有助于我们较好地理解这两个定理的实质，并把它们应用于实际之中．但是当我们用定理的形式来表达时，我们将给出精确的描述．在本节中我们还将给出依测度收敛的概念，以及依测度收敛与几乎处处收敛的关系．

引理 4.1 设$\{f_n\}$是E上的一列函数，f是定义在E上的函数，则E中所有使$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的点x所组成的集合D可以表示为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon_k). \tag{4.1}$$

其中$\{\varepsilon_k\}$是任意给定的一列单调减少且趋于零的正数；$E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon_k)=\{x\in E\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}$.

证明 对任意的$x_0\in D$，即$\{f_n(x_0)\}$不收敛于$f(x_0)$．于是存在$\varepsilon_0>0$，及一列正整数$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots$，使

$$|f_{n_i}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

由于$\{\varepsilon_k\}$单调减少且趋于零，我们可以取一个充分大的k，使$\varepsilon_k<\varepsilon_0$，于是

$$|f_{n_i}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_k.$$

对每一个$N\in\mathbf{N}$，皆有

$$x_0 \in \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_k),$$

从而

$$x_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_k),$$

对充分大的 k 成立. 于是有

$$x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_k).$$

另一方面, 设 $x_0 \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_k)$, 则存在 $k_0 \in \mathbf{N}$, 使

$$x_0 \in \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_{k_0}).$$

故对每一个 $N \in \mathbf{N}$, 皆有

$$x_0 \in \bigcup_{n=N}^{\infty} E(|f_n - f| \geqslant \varepsilon_{k_0}).$$

可见对任意的 N, 恒有与 n 有关的正整数 $n_N > N$, 使

$$|f_{n_N}(x_0) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon_{k_0}.$$

这就证明了 $\{f_n(x)\}$ 不收敛于 $f(x_0)$, 亦即 $x_0 \in D$. (4.1)式得证. ▯

定理 4.2 (Егоров定理)设

(1) $mE < +\infty$, $\{f_n\}$ 是 E 上的一列几乎处处取有限值的可测函数.

(2) 在 E 上 $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)(a.e.)$, 且 $|f(x)| < +\infty(a.e.)$.

则对任意的 $\delta > 0$, 必存在 E 的可测子集 E_δ, 使得 $m(E \setminus E_\delta) < \delta$, 且在 E_δ 上 $\{f_n\}$ 一致收敛于 f.

证明 由引理 3.9. 我们不妨设每一个 f_n 及 f 在 E 上处处取

有限值. 取一列单调减少趋于零的正数$\{\varepsilon_k\}$,对每一个 ε_k,令

$$G_{n,k}=E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon_k).$$

且令 $A_{N,k}=\bigcup_{n=N}^{\infty}G_{n,k}$, 即

(4.2) $$A_{N,k}=\bigcup_{n=N}^{\infty}G_{n,k}=\{x\in E\mid \text{存在}n\geqslant N,\text{使}|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon_k\}.$$

由引理 4.1 知 E 中使$\{f_n(x)\}$不收敛于$f(x)$的点 x 所成的集为

$$D=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}E(|f_n-f|\geqslant\varepsilon_k)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{N=1}^{\infty}A_{N,k}.$$

由假设在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)(a.e.)$,故 $mD=0$. 因为零测度集的每一个子集仍为零测度集,所以对于每一个 $k\in\mathbf{N}$,皆有

(4.3) $$m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}A_{N,k}\right)=0.$$

由(4.2)式知,对每一个正整数 k, $\{A_{N,k}\}_{N\in N}$ 是一列单调下降的可测集,而 $mA_{1,k}\leqslant mE<+\infty$,故$\lim\limits_{N\to\infty}mA_{N,k}=0$(见定理 2.9(2)). 因此, 对于任意的 $\delta>0$, 存在充分大的正整数 N_k(N_k 与 k 及 δ 有关). 使得

$$mA_{N_k,k}<\frac{\delta}{2^k}.$$

令 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{N_k,k}$,则 A 可测, 且有

$$mA\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}mA_{N_k,k}<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^k}=\delta.$$

令 $E_\delta=E\setminus A$,则 $E_\delta\subset E$, $m(E\setminus E_\delta)=mA<\delta$. 现在我们来证明在$E_\delta$

上$\{f_n\}$一致收敛于f.

对任意的$\varepsilon>0$,由于$\{\varepsilon_k\}$单调减少趋于零,故存在ε_k,使$\varepsilon_k<\varepsilon$. 对此$\varepsilon_k$,我们取上面证明中找出的正整数$N_k$,对每一个$x\in E_\delta$,有$x\notin A$,从而对每一个$k\in\mathbf{N}$,有$x\notin A_{N_k,k}$. 由(4.2)式知,对每一个$n\geqslant N_k$,皆有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon_k<\varepsilon.$$

因此$\{f_n\}$在E_δ上一致收敛于f. □

Егоров定理说明了可测函数列几乎处处收敛与一致收敛之间的关系. 它常常成为处理可测函数列的各种极限问题的有力工具. 必须指出,Егоров定理中的条件$mE<+\infty$是不可去掉的,否则定理便不再成立.

我们知道,可测集上的连续函数是可测函数. 下面的定理指出,可测函数除去一个测度可以任意小的可测集之外,是一个连续函数.

定理4.3 (Лузин定理) 设E是可测集,且$mE<+\infty$,f是E上几乎处处有限的可测函数,则对任意的$\varepsilon>0$,必存在闭集$F\subset E$,使得

(1) $m(E\setminus F)<\varepsilon$.

(2) f在F上的限制$f|_F$是F上的连续函数.

证明 考虑到可测函数都是简单函数的极限,所以我们的证明分为两步进行. 第一步先证f是简单函数的情形,第二步再证f为一般几乎处处有限的可测函数的情形.

第一步. 设f是简单函数,$f=\sum_{i=1}^{n}c_i\mathbf{1}_{E_i}$,这里$E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$,$E_i$是互不相交的可测集. 对于任意的$\varepsilon>0$,由本章定理2.18,存在闭集$F_i\subset E_i$,使$m(E_i\setminus F_i)<\dfrac{\varepsilon}{n}$. 令$F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i$,则$F$是闭集,且有

如下的结论:

(a) $F=\bigcup_{i=1}^{n}F_i\subset\bigcup_{i=1}^{n}E_i=E.$

(b) $$m(E\setminus F)=m\left[\bigcup_{i=1}^{n}E_i\setminus\bigcup_{i=1}^{n}F_i\right]=m\left[\bigcup_{i=1}^{n}(E_i\setminus F_i)\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}m(E_i\setminus F_i)$$

$$<n\cdot\frac{\varepsilon}{n}=\varepsilon.$$

(c) $f|_F$ 在 F 上连续.

对于(c),事实上设 $x_0\in F$,则有 $i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$,使 $x_0\in F_{i_0}$,由于 F_i 是互不相交的闭集,应用第二章定理 2.11(5). 有$\delta>0$, 使 x_0 与闭集 F_i 的距离 $d(x_0,F_i)>\delta(i\neq i_0)$,从而有

$$F\cap B(x_0,\delta)=F_{i_0}\cap B(x_0,\delta).$$

把F 作为度量空间,$F\cap B(x_0,\delta)$是F 中以 x_0 为中心,δ为半径的开球. 而 f 在 F_{i_0} 上取常数值 c_{i_0},故对任意的 $x\in F\cap B(x_0,\delta)$,恒有

$$|f|_F(x)-f|_F(x_0)|=|f(x)-f(x_0)|=c_{i_0}-c_{i_0}=0.$$

因此, 由第二章定义 4.4 得到 $f|_F$ 在 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知 $f|_F$ 是F 上的连续函数.

第二步. 设 f 是 E 上几乎处处有限的可测函数. 于是有一列简单函数$\{\varphi_n\}$,使得对每一个 $x\in E$,有$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x)$.

由 Егоров 定理知, 对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $E_\delta\subset E$, 使得 $m(E\setminus E_\delta)<\frac{\varepsilon}{2}$,并且在 E_δ 上$\{\varphi_n\}$一致收敛于 f, 从第一步的证明知道,对每一个简单函数 φ_n,都有闭集 $F_n\subset E_\delta$,使得

$$m(E_\delta\setminus F_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

并且 $\varphi_n|_{F_n}$ 是 F_n 上的连续函数. 令 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n$, 则

(a) F 为闭集,

(b) $F\subset E_\delta\subset E$,

(c) $m(E_\delta\setminus F)=m\left[\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_\delta\setminus F_n)\right]<\frac{\varepsilon}{2}$.

故

$$m(E\setminus F)\leqslant m(E\setminus E_\delta)+m(E_\delta\setminus F)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$=\varepsilon.$$

易知每一个 $\varphi_n|_F$ 在 F 上都连续，且在 F 上 $\{\varphi_n\}$ 一致收敛于 f. 所以 $f|_F$ 在 F 上连续. □

Лузин 定理给出了可测函数与连续函数之间的关系. 使我们对可测函数的结构有了进一步的了解. 同时，利用 Лузин 定理我们可以用连续函数去逼近一般的可测函数，从而使问题本身得到简化.

下面我们作一些努力来改善 Лузин 定理的条件和结论.

(1) $mE<+\infty$ 的条件可以去掉. 在 $mE=+\infty$的情况下，我们可以把 E 表示为可数个互不相交的有界可测集之并. 例如，令 $E_n=E\cap(n-1,n]$ $(n=0,\ \pm1,\pm2,\cdots)$，则 $E=\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}E_n$. 由于在每一个$E_n$ 上 Лузин 定理的结论成立，我们可以证明在 E 上 Лузин 定理的结论也成立. 此证明留作习题请读者自证.

(2) 可以证明：在$\mathbf{R}$的任何闭集F上定义的连续函数 f，都可以扩张为在$\mathbf{R}$上定义的连续函数 g. 此外还可以要求

$$\sup_{x\in\mathbf{R}}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|. \tag{4.4}$$

我们允许上式右端可以为$+\infty$,这时左端也为$+\infty$.

我们用构造的方法来证明这个结论. 由于F是闭集,则$\mathbf{R}\setminus F$是开集,从而$\mathbf{R}\setminus F$可以表示为至多可数个互不相交的开区间(a_i, b_i)之并.(在这些开区间中,可能存在这样的开区间(a_i,b_i),使得$a_i=-\infty$或者$b_i=+\infty$.)由于各开区间(a_i,b_i)的端点属于F, 定义函数g使得

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{若 } x\in F, \\ f(a_i)+\dfrac{f(b_i)-f(a_i)}{b_i-a_i}(x-a_i), & \text{若 } a_i,b_i \text{ 有限}, x\in(a_i,b_i), \\ f(a_i), & \text{若 } b_i=+\infty, x\in(a_i,b_i), \\ f(b_i), & \text{若 } a_i=-\infty, x\in(a_i,b_i). \end{cases}$$

则g是$\mathbf{R}$上的连续函数,g是f的扩张,且满足条件(4.4).

附注 上述扩张定理可以推广到更一般的情形:设F是度量空间(或正规拓扑空间)X中的闭集,则(a)F上定义的连续函数f,可以扩张为在X上定义的连续函数g;(b) F上定义的有界连续函数f,可以扩张为在X上定义的有界连续函数g,且

$$\sup_{x\in X}|g(x)|=\sup_{x\in F}|f(x)|.$$

这就是 Tietze-Урысон 扩张定理.

归纳上述的讨论,我们实际上已经证明了 Лузин 定理可以写成如下的形式.

定理 4.4 设f是可测集E上几乎处处有限的可测函数,则对任意的$\varepsilon>0$,存在闭集$F\subset E$及$\mathbf{R}$上的连续函数g,使得

(1) $g(x)=f(x) \quad (x\in F)$,

(2) $m(E\setminus F)<\varepsilon$,

(3) $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|g(x)|=\sup\limits_{x\in F}|f(x)|$.

定义 4.5 设$\{f_n\}$是可测集E上的一列可测函数, 它们都是几乎处处有限的. 如果有E上的可测函数f, 使得对任意的正数σ,皆有

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0.$$

则称$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f(converges to f in measure)，记为$f_n \xrightarrow{m} f$.

定理 4.6 (Lebesgue 定理)设

(1) $mE<+\infty$,

(2) $\{f_n\}$是E上一列几乎处处有限的可测函数，

(3) 在E上$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)(a.e.)$，且$|f(x)|<+\infty(a.e.)$.

则在E上有$f_n \xrightarrow{m} f$.

证明 不妨设$f_n(n\in\mathbf{N})$与f处处有限. 对任意的$\varepsilon>0$，由Егоров定理，存在可测集$E_\delta\subset E$，使$m(E\setminus E_\delta)<\varepsilon$，且$\{f_n\}$在$E_\delta$上一致收敛于$f$. 于是对任意的$\sigma>0$，存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$n\geqslant N$时，有

$$|f_n(x)-f(x)|<\sigma, \qquad (x\in E_\delta).$$

故当$n\geqslant N$时，$E(|f_n-f|\geqslant\sigma)\subset E\setminus E_\delta$. 于是

$$mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)\leqslant m(E\setminus E_\delta)<\varepsilon.$$

这表明$\lim\limits_{n\to\infty} mE(|f_n-f|\geqslant\sigma)=0$，即在$E$上$f_n \xrightarrow{m} f$. □

定理 4.6 告诉我们，在测度有限的可测集E上几乎处处收敛的可测函数列必定是依测度收敛的. 值得注意的是当$mE=+\infty$时，定理 4.6 不再成立. 反之，依测度收敛的序列未必是几乎处处收敛的. 下面我们举出一个依测度收敛的序列处处不收敛的例子.

例 1 对于$i\in\mathbf{N}$及$1\leqslant k\leqslant 2^i$，我们在$[0,1]$上定义函数$f_k^{(i)}$，使

$$f_k^{(i)}(x)=\begin{cases}1, & 若x\in[(k-1)2^{-i},k2^{-i}],\\ 0, & 若x\in[0,1]\setminus[(k-1)2^{-i},k2^{-i}],\end{cases}$$

$$(k=1,2,\cdots,2^i).$$

令 $f_1=f_1^{(1)}, f_2=f_2^{(1)}, f_3=f_1^{(2)}, f_4=f_2^{(2)}, f_5=f_3^{(2)}$，$f_6=f_4^{(2)}, f_7=f_1^{(3)}$，…，则 $f_n \xrightarrow{m} 0$. 但是对每一个 $x\in[0,1]$, $\{f_n(x)\}$ 皆发散.

然而 F. Riesz 指出，可以从依测度收敛的序列中选出一个几乎处处收敛的子序列.

定理4.7 (Riesz 定理)设$\{f_n\}$ 在可测集E上依测度收敛于f,则$\{f_n\}$必有子序列$\{f_{n_k}\}$在E上几乎处处收敛于f

证明 由于$f_n \xrightarrow{m} f$,对任意的 $\varepsilon>0$,有 $mE(|f_n-f|\geqslant\varepsilon)\to 0$,从而对每一个 $k\in\mathbf{N}$,存在 $n_k\in\mathbf{N}$,使

$$mE\left(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)<\frac{1}{2^k}.$$

我们还可以要求 $n_1<n_2<\cdots$.

令 $E_k=E\left(|f_{n_k}-f|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)$, $F_N=\bigcap_{k=N}^{\infty}(E\backslash E_k)$.

由于

$$E\backslash E_k=E\left(|f_{n_k}-f|<\frac{1}{2^k}\right),$$

故

$$F_N=\left\{x\in E\,|\,\text{对每一个 } k\geqslant N \text{ 皆有} |f_{n_k}(x)-f(x)|<\frac{1}{2^k}\right\}.$$

显然$\{f_{n_k}\}$在 F_N 上一致收敛于 f. 令 $F=\bigcup_{N=1}^{\infty}F_N$, 则$\{f_{n_k}\}$在 F 上处处收敛于 f.

现在只要证明 $m(E\backslash F)=0$ 即可. 由于

$$E\backslash F=E\backslash\bigcup_{N=1}^{\infty}F_N=\bigcap_{N=1}^{\infty}(E\backslash F_N)=\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k,$$

故对每一个 $N\in\mathbf{N}$,

$$m(E\setminus F)\leqslant m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)\leqslant\sum_{k=N}^{\infty}mE_k<\sum_{k=N}^{\infty}\frac{1}{2^k}.$$

当 $N\to\infty$时，上式右端趋于零．因此

$$m(E\setminus F)=0.$$ □

习　题

1. 设$\{f_n\}$是E上的一列函数，f是定义在E上的函数．证明E中所有使$\{f_n(x)\}$收敛于$f(x)$的点x所组成的集合B可以表示为

$$B=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{N=1}^{\infty}\bigcap_{n=N}^{\infty}E(|f_n-f|<\varepsilon_k),$$

其中$\{\varepsilon_k\}$是任意给定的一列单调减少且趋于零的正数．

2. 设$\{f_n\}$是可测集E上的一列可测函数，试证它的收敛点集与发散点集都是可测集．

3. 试说明 Егоров 定理中，条件 $mE<+\infty$是不可去掉的．

4. 设在可测集E上 $f_n\xrightarrow{m}f$，且 $f(x)=g(x)$ (a.e.)，则 $f_n\xrightarrow{m}g$.

5. 设在可测集E上，$f_n\xrightarrow{m}f$且$f_n\xrightarrow{m}g$，则在E上$f(x)=g(x)$ (a.e.).

6. 证明 Лузин 定理中把$mE<+\infty$的条件去掉之后，定理仍然成立．

7. 证明 Лузин 定理的逆定理：设f为可测集E上几乎处处有限的函数，若对于任意的$\varepsilon>0$，有闭集F，使$F\subset E$，$m(E\setminus F)<\varepsilon$，$f|_F$在$F$上是连续函数，则$f$在$E$上是可测函数．

8. 举例说明 Lebesgue 定理在$mE=+\infty$的集E上不再成立．

9. 设在可测集E上可测函数列$\{f_n\}$依测度收敛于可测函数f，并且在E上$f_n(x)\leqslant f_{n+1}(x)$几乎处处成立($n\in\mathbf{N}$)，证明在$E$上$\{f_n(x)\}$几乎处处收敛于$f(x)$.

10. 设$mE<+\infty$，$\{f_n\}$和$\{g_n\}$是E上的几乎处处有限的可测函数列，且$f_n\xrightarrow{m}f$，$g_n\xrightarrow{m}g$．证明

(1) $f_n+g_n\xrightarrow{m}f+g$,

(2) $\alpha f_n \xrightarrow{m} \alpha f$ （α 为实数），

(3) $|f_n| \xrightarrow{m} |f|$，

(4) $\sup\{f_n, g_n\} \xrightarrow{m} \sup\{f, g\}$，$\inf\{f_n, g_n\} \xrightarrow{m} \inf\{f, g\}$，

(5) $f_n g_n \xrightarrow{m} fg$。

第四章　Lebesgue积分

在建立 Lebesgue 积分之前，有必要对我们熟知的数学分析中的定积分，也就是 Riemann 积分的定义作一个简要的回顾.

设 f 是定义在区间$[a,b]$上的函数，在$[a,b]$上任取一组分点：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，或者说这组分点是$[a,b]$ 中的一个分划 σ. 令

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x),\qquad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x).$$

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$(i=1,2,\cdots,n)$. 分别称和式

$$S(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,\ \ s(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i.$$

为 f 关于分划 σ 的大和与小和. 对于$[a,b]$的任意一个分划，皆有 $S(\sigma)\geqslant s(\sigma)$. 并且大和组成的数集有下界，小和组成的数集有上界，故可令

$$(R)\overline{\int_a^b}f(x)dx=\inf_{\sigma}\{S(\sigma)\},$$
$$(R)\underline{\int_a^b}f(x)dx=\sup_{\sigma}\{s(\sigma)\}.$$

并分别称为 f 在$[a,b]$上的上 Riemann 积分与下 Riemann 积分. 显然

$$(R)\overline{\int_a^b}f(x)dx\geqslant(R)\underline{\int_a^b}f(x)dx.$$

如果等式

$$(R)\overline{\int_a^b}f(x)dx=(R)\underline{\int_a^b}f(x)dx$$

成立. 则称 f 在$[a,b]$ 上 Riemann 可积. 简称为 R-可积. 这时

它们的公共值称为 f 在$[a,b]$上的 Riemann 积分(或定积分)，简称为 R-积分,并记为

$$(R)\int_a^b f(x)dx.$$

我们知道,f 在$[a,b]$上是 R-可积的等价于当$[a,b]$上的分点数 $n\to\infty$,且 $\lambda(\sigma)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\to 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i\to 0.$$

若令 $\omega_i=M_i-m_i$，即 ω_i 表示函数 f 在第 i 个小区间上的振幅，则 f 在$[a,b]$上是 R-可积的也等价于当 $n\to\infty$且 $\lambda(\sigma)\to 0$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to 0.$$

因此大体上可以说,间断点"不太多"的有界函数是 R-可积的. 例如$[a,b]$ 上的连续函数和具有有限个第一类间断点的分段连续函数都是 R-可积的. 严格地讲,可以证明如下的结论:

设 f 是区间$[a,b]$上的有界函数,则 f 在$[a,b]$上是 R-可积的,当且仅当 f 在$[a,b]$上的所有间断点组成的集合是零测度集.

但是,仍然有不少的函数不能包含在 R-可积的函数类中

例 1 考虑区间$[0,1]$上的 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1,\text{若 } x \text{ 是}[0,1]\text{中的有理数},\\0,\text{若 } x \text{ 是}[0,1]\text{中的无理数}.\end{cases}$$

对于$[0,1]$的任意分划 σ,在每一个小区间$[x_{i-1},x_i]$上都存在有理点及无理点,故 $M_i=1,m_i=0$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i-m_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=1\not\to 0\ .$$

因此,Dirichlet函数 $D(x)$在$[0,1]$上不是 R-可积的.

由此可见，R-可积的函数类中包含的函数还不够广泛. R-积分除了有这一个缺陷之外，在积分的运算及 R-可积函数的结构上还有一些不足之处.

例如在 R-积分中积分与函数列的极限交换次序的条件，在一般微积分教科书中，都要求函数列是一致收敛的. 1971年W. A. J. Luxemburg 证明了下面的控制收敛定理(见 Amer. Math. Monthly, 78(1971), No. 9, p970-979)，不要求函数列满足一致收敛的条件.

定理(控制收敛定理) 设

(1) f 和 g 是区间$[a,b]$上的 R-可积函数且 g 非负，

(2) $\{f_n\}$是$[a,b]$上的一列 R-可积函数，

(3) $|f_n(x)|\leqslant g(x)\quad (x\in[a,b], n\in\mathrm{N})$，

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)\quad (x\in[a,b])$，

则

$$\lim_{n\to\infty}(R)\int_a^b f_n(x)dx=(R)\int_a^b f(x)dx.$$

特别地，当 $g(x)=M\quad (x\in[a,b], M$ 为非负常数)时，上面的定理就成为有界收敛定理. 定理中要求极限函数 f 是 R-可积的条件是不可少的. 因为即使序列$\{f_n\}$是渐升的有界序列，也不能保证其极限函数 f 是 R-可积的.

另外，关于微积分学的基本定理

$$(R)\int_a^x f'(t)dt=f(x)-f(a)\quad (x\in[a,b])$$

成立的条件，不仅要求 f 在$[a,b]$上是可微的，而且要求 f' 在$[a,b]$ 上是 R-可积的. (Volterra 早在 1881 年就作出了一个可微函数，其导函数有界，但此导函数不是 R-可积的.) 这就使得微积分学的基本定理的应用受到了限制.

Riemann 积分的另一局限性还表现在 R-可积函数空间的不完备性上. 例如,设 $R[0,1]$是$[0,1]$上 R-可积函数的全体，并在$[0,1]$上定义度量 d,使得对任意的 $f,g\in[0,1]$,有

$$d(f,g)=(R)\int_0^1|f(x)-g(x)|dx.$$

可以证明,在此度量 d 下空间 $R[0,1]$是不完备的. 这在应用上是很不方便的,因为在近代泛函分析中,很多重要的结论往往要求空间的完备性.

为了改善 R-积分的这些缺陷，很多数学家从十九世纪末开始,致力于寻求一种新的积分理论. 在1883 年 G. Cantor(1845—1918) 首先给出了 $\mathbf{R}^n$ 中任意集合的测度的定义. 其后另一些数学家给出了类似的定义. G. Peam(1858—1932)在 1887 年和 C. Jordan(1838—1922) 在 1892 年对测度的定义作了较大的改进,并把积分的概念与测度的概念联系了起来. 在 1898 年 Peano 在他的著作中指出了在R的有界闭区间上的有界非负函数Riemann可积的充分必要条件. E. Borel(1871-1956) 又进一步建立了 R 中的 Borel 集的 Borel 测度理论.

H. Lebesgue(1875—1941) 在积分的理论上迈出了决定性的一步. 1902 年他在"*Inte'grale, Longueur, Aire*" ("积分,长度,面积")的论文中,在有界实数集的集族上定义我们已熟知的 Lebesgue 测度. 在这个基础上 Lebesgue 又定义了一种新的积分(即 Lebesgue 积分). 这种积分的可积函数类中包含的函数比 R-积分更为广泛. 在积分的运算上具有更大的适用性及灵活性. 可以说 Lebesgue 积分在很大的程度上克服了 R-积分的缺陷，这在现代分析的发展上具有重要的理论价值.

在Lebesgue以后,还有很多的数学家如F. Riesz(1880-1956), A. Denjoy(1884-不详), J. Radon(1887-1956) 等人进一步改进

和发展了 Lebesgue 积分，对现代积分理论的基础性工作方面作出了重要贡献.

在本章中，我们将把 Lebesgue 积分简称为 L-积分或积分.

§1 Lebesgue 积分的定义及性质

L-积分的建立可以有多种不同的途径，我们采用一种由简单到一般的方法. 先定义简单函数的积分，然后再逐步推广到建立一般函数的积分.

考虑可测集 E 上的简单函数 φ，即

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_i \mathbf{1}_{E_i}. \tag{1.1}$$

这里 E 是有限个互不相交的可测集 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$之并，$\mathbf{1}_{E_i}$ 是 E 上关于 E_i 的特征函数. 应当指出的是(1.1)式中 φ 的表示式.并不是唯一的. 然而，若我们要求(1.1)式中的 $c_1,\cdots,c_n$ 是 n 个互不相同的非零值，$E_i=E(\varphi=c_i)(i=1,2,\cdots,n)$，则满足此要求的简单函数 φ 的表示式(1.1) 是唯一的. 我们称它为 φ 的典范表示式(canonical representation).

在本节中，我们总是假定 E 是测度有限的可测集.

定义 1.1 设在可测集 E 上简单函数 φ 有如下的典范表示式

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}c_i \mathbf{1}_{E_i}.$$

则称和数 $\sum_{i=1}^{n}c_i mE_i$ 为简单函数 φ 在 E 上的积分(integral)，记为

$$\int_E \varphi(x)dx=\sum_{i=1}^{n}c_i mE_i.$$

在有一些书里，把积分记为$\int_E \varphi(x)dm$，是为了强调L-积分与L-测度m的密切关系.

对于[0,1]上的 Dirichlet 函数$D(x)$，由定义 1.1 有

$$\int_{[0,1]} D(x)dx = m\{x|x\text{是}[0,1]\text{中的有理数}\} = 0.$$

如果简单函数φ的表示式，不是典范的时，我们有如下的引理：

引理1.2 设E是互不相交的可测集$E_i(i=1,2,\cdots,n)$之并，φ是E上的简单函数，即$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{E_i}$，则

$$\int_E \varphi(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i mE_i.$$

证明 从$c_1, c_2, \cdots, c_n$中选出互异的非零值，并设为$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$. 令$A_j = E(\varphi = \alpha_j) = \bigcup_{c_i = \alpha_j} E_i$. 由测度的有限可加性，有$\alpha_j mA_j = \sum_{c_i = \alpha_j} c_i mE_i$. 因此

$$\int_E \varphi(x)dx = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j mA_j = \sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{c_i = \alpha_j} c_i mE_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} c_i mE_i. \qquad \square$$

虽然在可测集E上的简单函数φ的表示式$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{E_i}$可以有不同的形式. 但是引理 1.2 却表明$\sum_{i=1}^{n} c_i mE_i$是一个确定的值，它与$\varphi$的表示式的形式无关. 而这个值就是以$\varphi$为典范表示式

时的积分值. 这样引理 1.2 就拓广了定义 1.1 的适用范围.

引理 1.3 设 φ,ψ 是可测集 E 上的简单函数，α,β 是常数，则

$$\int_E(\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x))dx=\alpha\int_E\varphi(x)dx+\beta\int_E\psi(x)dx.$$

若 $\varphi\leqslant\psi(a.e.)$，则

$$\int_E\varphi(x)dx\leqslant\int_E\psi(x)dx.$$

证明 设 φ 和 ψ 的典范表示式分别为

$$\varphi=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{1}_{A_i},\quad \psi=\sum_{j=1}^{m}b_j\mathbf{1}_{B_j}.$$

所有的交 $A_i\cap B_j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 组成有限个互不相交的可测集族，把它们记为 $E_1,E_2,\cdots,E_N$，则

$$\varphi=\sum_{k=1}^{N}a'_k\mathbf{1}_{E_k},\quad \psi=\sum_{k=1}^{N}b'_k\mathbf{1}_{E_k}.$$

其中 $E_k=A_i\cap B_j$ 时，$a'_k=a_i$，$b'_k=b_j(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$. 于是

$$\alpha\varphi+\beta\psi=\sum_{k=1}^{N}(\alpha a'_k+\beta b'_k)\mathbf{1}_{E_k}.$$

由引理 1.2 得

$$\begin{aligned}\int_E(\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x))dx&=\sum_{k=1}^{N}(\alpha a'_k+\beta b'_k)mE_k\\&=\alpha\int_E\varphi(x)dx+\beta\int_E\psi(x)dx.\end{aligned}$$

对于第二个结论，由于 $\psi-\varphi$ 是 E 上的简单函数，且 $\psi-\varphi\geqslant0$ $(a.e.)$，故由定义 1.1 有

$$\int_E\psi(x)dx-\int_E\varphi(x)dx=\int_E(\psi(x)-\varphi(x))dx\geqslant0.\quad\square$$

设 f 是可测集E上的有界函数，对于所有满足 $\varphi\leqslant f$ 的简单函数φ 及所有满足 $\psi\geqslant f$ 的简单函数 ψ，由引理 1.3 恒有

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx\leqslant\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx. \tag{1.2}$$

人们自然会问，什么时候不等式(1.2)成为等式？下面的定理给出了回答.

定理1.4 设 f 是测度有限的可测集E 上定义 的 有界函数. 对所有的简单函数 φ 和 ψ，

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx=\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx. \tag{1.3}$$

成立. 当且仅当 f 是 E 上的可测函数.

证明 “$\Longleftarrow$”设 f 是有界可测函数，则存在 $M>0$，使得

$$|f(x)|<M \quad (x\in E).$$

由于 f 可测，则对于任意给定的正整数 n，集

$$E_k=E\left(\frac{(k-1)M}{n}\leqslant f<\frac{kM}{n}\right) \qquad (-n+1\leqslant k\leqslant n),$$

是互不相交的可测集. 且 $E=\bigcup\limits_{k=-n+1}^{n}E_k$. 那末

$$mE=\sum_{k=-n+1}^{n}mE_k.$$

定义简单函数 φ_n 和 ψ_n，使得

$$\varphi_n=\frac{M}{n}\sum_{k=-n+1}^{n}(k-1)1_{E_k},$$

$$\psi_n=\frac{M}{n}\sum_{k=-n+1}^{n}k1_{E_k},$$

则对任意的 $n\in\mathrm{N}$，皆有 $\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$. 于是对所有的简单函数 φ 和 ψ

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx\geqslant\int_E\varphi_n(x)dx=\frac{M}{n}\sum_{k=-n+1}^{n}(k-1)mE_k,$$

$$\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx\leqslant\int_E\psi_n(x)dx=\frac{M}{n}\sum_{k=-n+1}^{n}kmE_k.$$

故

$$\begin{aligned}0&\leqslant\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx-\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx\\&\leqslant\int_E\psi_n(x)dx-\int_E\varphi_n(x)dx\\&\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=-n+1}^{n}mE_k\\&=\frac{M}{n}mE\longrightarrow 0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

这就证明了等式(1.3)成立.

“$\Longrightarrow$”设等式(1,3)成立，则对任意的$n\in\mathbf{N}$，存在简单函数φ_n和ψ_n使得$\varphi_n\leqslant f\leqslant\psi_n$，且

$$(1,4)\qquad\int_E\psi_n(x)dx-\int_E\varphi_n(x)dx<\frac{1}{n}.$$

令$\varphi^*=\sup_n\varphi_n$，$\psi^*=\inf_n\psi_n$，则$\varphi^*\leqslant f\leqslant\psi^*$，并且由第三章定理3.5知，$\varphi^*$和$\psi^*$都是可测函数．令

$$\Delta=\{x\in E\mid\varphi^*(x)<\psi^*(x)\}.$$

对每一个$k\in\mathbf{N}$，令

$$\Delta_k=\left\{x\in E\mid\varphi^*(x)<\psi^*(x)-\frac{1}{k}\right\},$$

则$\Delta=\bigcup_{k=1}^{\infty}\Delta_k$，且$\Delta_k\subset\left\{x\mid\varphi_n(x)<\psi_n(x)-\frac{1}{k}\right\}$．由(1.4)式知

$$m\Delta_k\leqslant m\left\{x\mid\varphi_n(x)<\psi_n(x)-\frac{1}{k}\right\}<\frac{k}{n}.$$

对任意的 $n\in\mathbf{N}$ 都成立. 由 n 的任意性可知上式左端必等于零, 即 $m\Delta_k=0(k\in\mathbf{N})$, 故 $m\Delta=0$. 这样, 除去一个零测度集之外, 有 $\varphi^*=\psi^*$. 从而除去一个零测度集之外, 有 $\varphi^*=f$. 因此, 由第三章引理 3.9 便得到 f 是可测函数. □

从上面定理 1.4 的证明过程中, 可以得到如下的两个等价命题:

(1) f 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数.

(2) 设 $|f(x)|<M \quad (x\in E)$. 对 $[-M,M]$ 的任意一个分划

$$-M=y_{-n}<y_{-n+1}<\cdots<y_0<y_1<\cdots<y_n=M,$$

令 $E_k=E(y_{k-1}\leqslant f<y_k) \quad (-n+1\leqslant k<n)$. 当 $n\to\infty$ 且 $\lambda=\max\limits_{-n+1\leqslant i\leqslant n}|y_i-y_{i-1}|\to 0$, 对任意的 $\xi_k\in[y_{k-1}, y_k]$, 和式的极限

$\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\(\lambda\to 0)}}\sum\limits_{k=-n+1}^{n}\xi_k mE_k$ 收敛.

定义 1.5 设 E 是可测集且 $mE<+\infty$, f 是定义在 E 上的有界可测函数, 我们称 $\sup\limits_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx$(其中 φ 为任意满足 $\varphi\leqslant f$ 的简单函数)为 f 在 E 上的 L-积分(简称积分), 记为

$$\int_E f(x)dx=\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx.$$

由定理 1.4 我们可以说在测度有限的可测集上的有界可测函数是 L-可积的(简称可积). 这时有界可测函数 f 在 E 上的积分也可表示为

$$\int_E f(x)dx=\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx,$$

其中 ψ 为任意满足 $\psi\geqslant f$ 的简单函数. 可以看出定义1.5 是定义 1.1 的推广.

当 $E=[a,b]$ 时, f 在 $[a,b]$ 上的积分 $\int_{[a,b]}f(x)dx$ 也可记为

$$\int_a^b f(x)dx$$

下面的定理指出，对区间$[a,b]$上的有界函数而言，L-积分是R-积分的推广

定理 1.6 设 f 是$[a,b]$上的有界函数，若 f 在$[a,b]$上是 R-可积的，则 f 是可测的(从而是 L-可积的)，且

$$(R)\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

证明 考虑 f 在$[a,b]$上的 R-积分. 沿用本章开始所使用的符号，对$[a,b]$的任意一个分划 σ，分$[a,b]$为 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$. 在每一个小区间上取函数值 $f(x)$ 的上确界 M_i 及下确界 m_i $(i=1,2,\cdots,n)$，所作的大和与小和分别为

$$S(\sigma)=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i,\quad s(\sigma)=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i.$$

它们可以分别看作简单函数

$$\psi_n=\sum_{i=1}^n M_i 1_{[x_{i-1},x_i]},\ \varphi_n=\sum_{i=1}^n m_i 1_{[x_{i-1},x_i]}$$

的积分，即

$$S(\sigma)=\int_E\psi_n(x)dx,\quad s(\sigma)=\int_E\varphi_n(x)dx.$$

故

$$\begin{aligned}(R)\underline{\int_a^b} f(x)dx&=\sup_\sigma\{s(\sigma)\}\leqslant\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx\\&\leqslant\inf_{\psi\geqslant f}\int_E\psi(x)dx\leqslant\inf_\sigma\{S(\sigma)\}\\&=(R)\overline{\int_a^b} f(x)dx.\end{aligned}$$

其中 φ 与 ψ 是所有满足 $\varphi\leqslant f$ 与 $\psi\geqslant f$ 的简单函数. 由假设 f 在

$[a,b]$上 R-可积，故上面的不等式应该成为等式．由定理 1.4 便得到 f 是可测函数．再由定义 1.5 知 f 在$[a,b]$上的 R-积分与L-积分相等．□

但是我们应当指出，定理 1.6 的逆定理并不成立．例如前面我们讲过的 Dirichlet 函数就是一个例子．

定理 1.7 设 f 和 g 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数，则下面的运算性质成立．

(1) 线性

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx=\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx. \tag{1.5}$$

$$\int_E \alpha f(x)dx=\alpha\int_E f(x)dx \qquad (\alpha \text{ 为常数}). \tag{1.6}$$

(2) 若 $f=g(a.e.)$，则

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

(3) 若 $f\leqslant g(a.e.)$，则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

由此可得，

$$\left|\int_E f(x)dx\right|\leqslant\int_E |f(x)|dx$$

(4) 若 $a\leqslant f(x)\leqslant b \quad (x\in E)$，则

$$amE\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant bmE.$$

故

当 $mE=0$ 时， $\int_E f(x)dx=0$;

当 $f\geqslant 0$ 时， $\int_E f(x)dx\geqslant 0.$

(5) 若 $E=A\cup B$, A 与 B是可测集，且 $A\cap B=\varnothing$，则

$$\int_E f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx.$$

证明 (1) 设 φ_1 是满足 $\varphi_1\leqslant f$ 的简单函数，φ_2 是满足 $\varphi_2\leqslant g$ 的简单函数，则 $\varphi_1+\varphi_2$ 是简单函数，且 $\varphi_1+\varphi_2\leqslant f+g$. 于是

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx\geqslant\int_E[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)]dx$$

$$=\int_E\varphi_1(x)dx+\int_E\varphi_2(x)dx.$$

对上式右端两个积分分别对所有满足 $\varphi_1\leqslant f$ 的简单函数 φ_1，所有满足 $\varphi_2\leqslant g$ 的简单函数 φ_2 取上确界，则得

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx\geqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

另一方面，设简单函数 $\psi_1\geqslant f$, $\psi_2\geqslant g$. 则 $\psi_1+\psi_2$ 是简单函数，且 $\psi_1+\psi_2\geqslant f+g$ 于是有

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx\leqslant\int_E[\psi_1(x)+\psi_2(x)]dx$$

$$=\int_E\psi_1(x)dx+\int_E\psi_2(x)dx.$$

上式右端的两个积分分别对所有满足 $\psi_1\geqslant f$, $\psi_2\geqslant g$ 的简单函数 ψ_1 与 ψ_2 取下确界，则得

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx\leqslant\int_E f(x)dx+\int_E g(x)dx.$$

因此，(1.5)式成立.

若 $\alpha=0$ 时，显然(1.6)式成立. 现设 $\alpha\neq0$，那末 φ 是简单函数. 当且仅当 $\alpha\varphi$ 是简单函数.

当 $\alpha>0$ 时.

$$\int_E \alpha f(x)dx=\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\alpha\varphi(x)dx=\alpha\sup_{\varphi<f}\int_E\varphi(x)dx$$

$$=\alpha\int_E f(x)dx.$$

当 $\alpha<0$ 时，

$$\int_E \alpha f(x)dx=\sup_{\alpha\varphi\leqslant\alpha f}\int_E \alpha\varphi(x)dx=\sup_{\varphi\geqslant f}\int_E \alpha\varphi(x)dx$$

$$=\alpha\inf_{\varphi\geqslant f}\int_E \varphi(x)dx=\alpha\int_E f(x)dx.$$

(2) 我们只需证明

$$\int_E [f(x)-g(x)]dx=0$$

即可. 由于 $f-g=0(a.e.)$，则对任意的简单函数 $\varphi\leqslant f-g$，有 $\varphi\leqslant 0(a.e.)$，且

$$\int_E \varphi(x)dx\leqslant 0.$$

于是

$$\int_E [f(x)-g(x)]dx=\sup_{\varphi\leqslant f-g}\int_E \varphi(x)dx\leqslant 0.$$

同样，对任意的简单函数 $\psi\geqslant f-g$，有

$$\int_E [f(x)-g(x)]dx=\sup_{\psi\geqslant f-g}\int_E \psi(x)dx\geqslant 0.$$

故有

$$\int_E [f(x)-g(x)]dx=0.$$

因此，(2)得证.

其余的证明，请读者自己完成. 在证明的过程中只要注意到下面的明显结论:

$$\int_E \mathrm{I}_E dx=mE.$$

及当 $A\subset E$ 时，

$$\int_A f(x)dx=\int_E f(x)\mathrm{I}_A(x)dx.$$

就可以了. □

习　题

1. 设 $mE<+\infty$，有界函数 f 在 E 上是 L-可积的. 证明函数 f^2，$|f|$ 在 E 上也是 L-可积的.

2. 若 E 为有界可测集，$1_E(x)$ 是特征函数，则有

$$\int_E 1_E(x)dx=mE.$$

3. 设 $f(x)$ 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数，且 $a\leqslant f(x)\leqslant b$ $(x\in E)$，证明 $amE\leqslant\int_E fdx\leqslant bmE$.

4. 设 f 和 g 是测度有限的可测集 E 上的有界可测函数，若在 E 上有 $f\leqslant g\,(a.e.)$，证明 $\int_E fdx\leqslant\int_E gdx$.

5. 若 $[0,1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x\text{ 为无理数},\\ 0, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$ 计算

$$\int_{[0,1]}f(x)dx.$$

6. 若 $f\geqslant 0$，$\int_E fdx=0$，则在 E 上有 $f=0\,(a.e.)$.

§2　一般可积函数

在 §1 中，我们讨论了在测度有限的可测集上的有界可测函数的积分. 在本节中我们逐步将积分的定义加以推广.

首先，我们考虑在测度有限的可测集 E 上的非负可测函数（可以是无界函数）的积分.

设 f 是可测集 E 上的非负函数，1_E 为 E 上恒取常数值 1 的函数，即 $1_E(x)=1\ (x\in E)$. 令 $[f]_n=\inf\{f,\ n1_E\}$，即对每一个 $x\in E$.

$$[f]_n(x)=\inf\{f(x),\ n\}=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant n \text{ 时},\\ n, & \text{当 } f(x)>n \text{ 时}.\end{cases}$$

这样我们得到了一列有界的单调增加的非负函数$\{[f]_n\}$，即

$$0\leqslant[f]_1\leqslant[f]_2\leqslant\cdots\leqslant[f]_n\leqslant\cdots.$$

若 f 是E上的可测函数，则$[f]_n$ 是 E上的可测函数（见第三章定理 3.5)，并且是有界的，故$[f]_n$ 在E上可积．从而$\left\{\int_E[f]_n(x)dx\right\}$是单调增加的数列．

定义 2.1　设E是可测集，$mE<+\infty$．f 是 E上的非负可测函数，则极限$\lim\limits_{n\to\infty}\int_E[f]_n(x)dx$ 可能是有限数，也可能是$+\infty$．我们称此极限为f 在E上的积分，记为

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E[f]_n(x)dx.$$

若上式右端的极限是有限数时，则称 f 在E上可积．否则称 f 在E上的积分为$+\infty$．

注 1　在定义 2.1 的假设下，我们可以任意取一列单调增加趋于$+\infty$的正数$\{M_i\}$．令$[f]_{M_i}=\inf\{f,M_i1_E\}$，则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{i\to\infty}\int_E[f]_{M_i}(x)dx. \tag{2.1}$$

事实上，对任意的 $i\in\mathrm{N}$，存在 $n_0\in\mathrm{N}$　使 $M_i\leqslant n_0$，从而$[f]_{M_i}\leqslant[f]_{n_0}$．于是

$$\int_E[f]_{M_i}(x)dx\leqslant\int_E[f]_{n_0}(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.$$

故当 $i\to\infty$ 时，左端的极限存在．且

$$\lim_{i\to\infty}\int_E[f]_{M_i}(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx.$$

另一方面，对任意的 $n\in\mathrm{N}$，存在 $i_0\in\mathrm{N}$．使 $n\leqslant M_{i_0}$，从而$[f]_n\leqslant[f]_{M_{i_0}}$．于是

$$\int_E[f]_n(x)dx\leqslant\int_E[f]_{M_{i_0}}(x)dx\leqslant\lim_{i\to\infty}\int_E[f]_{M_i}(x)dx.$$

上式左端令 $n\to\infty$，则得

$$\int_E f(x)\,dx\leqslant\lim_{i\to\infty}\int_E [f]_{M_i}(x)\,dx.$$

因此(2.1)式成立. 由(2.1)式可以看到，若右端的极限是有限数时，f 在 E 上可积. 否则 f 在 E 上的积分为$+\infty$.

现在去掉 $mE<+\infty$ 的限制.

定义 2.2 设 f 是定义在可测集 E 上的非负可测函数，$\{E_n\}$ 是一列测度有限的可测集，并满足

$$E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots,$$

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

由定义 2.1，f 在每一个 E_n 上都有积分 $\int_{E_n}f(x)dx$，并且

$$\int_{E_1}f(x)dx\leqslant\int_{E_2}f(x)dx\leqslant\cdots\leqslant\int_{E_n}f(x)dx\leqslant\cdots.$$

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx$ 可能是有限数，也可能是$+\infty$. 我们称此极限为 f 在 E 上的积分，并记为

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx. \tag{2.2}$$

若(2.2)式右端的极限是有限数时，则称 f 在 E 上可积，否则称 f 在 E 上的积分为$+\infty$.

注 2 我们指出，由(2.2)式所定义的 f 在 E 上的积分与$\{E_n\}$的选取无关. 也就是说，若另有一列测度有限的可测集$\{F_n\}$满足 $F_1\subset F_2\subset\cdots F_n\subset\cdots$，且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{F_n}f(x)dx.$$

现在去掉 f“非负”的限制. 我们仍然采用记号 $f^+=\sup\{f,0\}$

与 $f^-=\sup\{-f,0\}$，即对每一个 $x\in E$，

$$f^+(x)=\sup\{f(x),0\}=\begin{cases}f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$f^-(x)=\sup\{-f(x),0\}=\begin{cases}-f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } f(x)>0 \text{ 时}.\end{cases}$$

显然，$f=f^+-f^-$ 且 $|f|=f^++f^-$. 当 f 是 E 上的可测函数时，f^+ 与 f^- 是 E 上的非负可测函数.

定义 2.3 设 f 是定义在可测集 E 上的可测函数. 若 f^+ 与 f^- 在 E 上皆可积时，则称 f 在 E 上可积. 这时定义 f 在 E 上的积分为

$$\int_E f(x)dx=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx.$$

若上式右端的两个积分中仅有一个积分为 $+\infty$ 时，我们说 f 在 E 上有积分(其值为 $+\infty$ 或 $-\infty$)；若上式右端的两个积分皆为 $+\infty$，则我们说 f 在 E 上的积分没有意义，或者说没有积分.

下面我们给出积分的一些基本性质.

定理 2.4 设 E 是可测集，

(1) 若 $mE=0$，则对 E 上的任意函数 f 皆有

$$\int_E f(x)dx=0.$$

(2) 若 f 在 E 上可积，则 f 在 E 上几乎处处有限，即

$$mE(f=+\infty)=0,\quad mE(f=-\infty)=0.$$

(3) 若 f 在 E 上可积，A 与 B 是可测集，$E=A\cup B$ 且 $A\cap B=\varnothing$. 则 f 在 A 与 B 上可积，且有

$$\int_E f(x)dx=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx.$$

反过来，若 f 在 A 与 B 上可积，则 f 在 $E=A\cup B$ 上可积.

证明 (1) 由于 $mE=0$，则 f 是 E 上的可测函数. 并且对任

意的 $n\in\mathbf{N}$，由定理 1.7(4)有

$$\int_E [f^+]_n(x)\,dx = 0,\quad \int_E [f^-]_n(x)\,dx = 0.$$

从而

$$\begin{aligned}\int_E f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_E [f^+]_n(x)\,dx - \lim_{n\to\infty}\int_E [f^-]_n(x)\,dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

(2) 记 $E_1 = E(f=+\infty)$，$E_2 = E(f=-\infty)$. 我们用反证法. 假设 $mE_1=\delta>0$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}$，均有

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x)\,dx \geqslant \int_E [f^+]_n(x)\,dx \geqslant \int_{E_1} [f^+]_n(x)\,dx \\ = n\delta,\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$，则得

$$\int_E f^+(x)\,dx = +\infty.$$

这与 f 可积矛盾，故 $mE_1=0$. 同理可证 $mE_2=0$.

(3) 由于 f 在 E 上可积，则 f^+ 与 f^- 在 E 上皆可积. 设 $\{E_n\}$ 是一列测度有限的单调增加的可测集，且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 令 $A_n = E_n\cap A$，$B_n=E_n\cap B$，则 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 都是单调增加的可测集列. $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，$B=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$，且 $A_n\cap B_n=\varnothing\,(n\in\mathbf{N})$. 由定理 1.7(5)有

$$\begin{aligned}\int_E f^+(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty}\int_{E_n} f^+(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\int_{E_n}[f^+]_k(x)\,dx \\ &= \lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left(\int_{A_n}[f^+]_k(x)\,dx + \int_{B_n}[f^+]_k(x)\,dx\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_{A_n} f^+(x)\,dx + \int_{B_n} f^+(x)\,dx\right) \\ &= \int_A f^+(x)\,dx + \int_B f^+(x)\,dx.\end{aligned}$$

同理

$$\int_E f^-(x)dx=\int_A f^-(x)dx+\int_B f^-(x)dx.$$

因此

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx&=\int_E f^+(x)dx-\int_E f^-(x)dx\\&=\int_A f^+(x)dx+\int_B f^+(x)dx-\int_A f^-(x)dx\\&\quad-\int_B f^-(x)dx\\&=\int_A f(x)dx+\int_B f(x)dx.\end{aligned}$$

反过来,结论显然成立. □

我们用归纳法可以把定理 2.4 (3)推广为

推论 2.5 (有限可加性)设 f 在可测集 E 上可积. $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$, $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是互不相交的可测集. 则

$$\int_E f(x)dx=\int_{E_1}f(x)dx+\cdots+\int_{E_n}f(x)dx.$$

定理 2.6 设 E 是可测集,

(1) 若 f 在 E 上可积, $g=f\,(a.e.)$, 则 g 在 E 上可积, 且

$$\int_E f(x)dx=\int_E g(x)dx.$$

(2) 若 f 和 g 在 E 上可积, $f\leqslant g\,(a.e.)$, 则

$$\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx.$$

(3) 若 f 在 E 上可积, 且 $a\leqslant f(x)\leqslant b\ (x\in E)$, 则

$$amE\leqslant\int_E f(x)dx\leqslant bmE.$$

证明 (1) 令 $A=E(f\neq g)$, 则 $mA=0$. 由定理 2.4 知, g 在

A及$E\setminus A$上可积. 从而g在E上可积. 且

$$\begin{aligned}\int_E g(x)dx &= \int_{E\setminus A} g(x)dx + \int_A g(x)dx \\ &= \int_{E\setminus A} f(x)dx + \int_A f(x)dx \\ &= \int_E f(x)dx.\end{aligned}$$

(2)与(3)的证明,请读者自己完成. □

定理 2.6(1)表明,在测度为零的集上改变函数值,既不影响函数的可积性,又不改变函数的积分值.

推论 2.7 设f是可测集E上的函数,若$f=0(a.e.)$,则

$$\int_E f(x)dx=0.$$

反过来,若$f\geqslant 0(a.e.)$, $\int_E f(x)dx=0$,则$f=0(a.e.)$.

因此,$\int_E |f(x)|dx=0$. 当且仅当$f=0(a.e.)$.

定理 2.8 设E是可测集,若f和g在E上可积. α是常数,则$f+g$和αf在E上皆可积,且

(2.3) $$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx,$$

(2.4) $$\int_E \alpha f(x)dx = \alpha\int_E f(x)dx.$$

证明 (1) 设f和g在E上非负可积. 对任意的$n\in\mathbf{N}$及$x\in E$,下列不等式成立:

(2.5) $$[f+g]_n(x)\leqslant [f]_n(x)+[g]_n(x)\leqslant [f+g]_{2n}(x),$$

由定理 1.7 有

$$\begin{aligned}\int_E [f+g]_n(x)dx &\leqslant \int_E [f]_n(x)dx + \int_E [g]_n(x)dx \\ &\leqslant \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.\end{aligned}$$

上式左端，当 $n\to\infty$ 时极限为有限数，故 $f+g$ 在 E 上可积. 且

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx \leqslant \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

同样，由不等式(2.5)又有

$$\int_E [f]_n(x)dx + \int_E [g]_n(x)dx \leqslant \int_E [f+g]_{2n}(x)dx$$

$$\leqslant \int_E [f(x)+g(x)]dx,$$

令 $n\to\infty$，得到

$$\int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx \leqslant \int_E [f(x)+g(x)]dx.$$

故(2.3)式成立. 容易证明，当 $mE=+\infty$ 时，(2.3)式仍然成立.

现设 f 和 g 是 E 上一般的可积函数. 由定理 2.4(2)，不妨设 $f(x)$ 和 $g(x)$ $(x\in E)$ 都为有限值. 由于

$$[f+g]^+ \leqslant f^+ + g^+,$$

$$[f+g]^- \leqslant f^- + g^-.$$

而 f^+, g^+, f^-, g^- 在 E 上皆可积，容易证明(见本节习题 1)，$[f+g]^+$ 与 $[f+g]^-$ 在 E 上也可积，因为

$$\begin{aligned}&(f^+-f^-)+(g^+-g^-)\\&=f+g\\&=(f+g)^+-(f+g)^-,\end{aligned}$$

所以

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+,$$

由前面已证的结论，便得

$$\int_E (f+g)^+(x)dx + \int_E f^-(x)dx + \int_E g^-(x)dx$$

$$= \int_E (f+g)^-(x)dx + \int_E f^+(x)dx + \int_E g^+(x)dx.$$

移项后，有如下结论：

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx.$$

(2) 设 f 在 E 上非负可积，$mE<+\infty$. 若 $\alpha>0$，对每一个 $n\in\mathbf{N}$，有

$$[\alpha f]_{\alpha n} = \alpha[f]_n.$$

这里，$[\alpha f]_{\alpha n}=\inf\{\alpha f, \alpha n 1_E\}$. 因为正数列 $\{\alpha n\}$ 单调增加，且趋于 $+\infty$. 故由定义 2.1 后面的注 1，得

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_E [\alpha f]_{\alpha n}(x)dx\\ &=\alpha\lim_{n\to\infty}\int_E [f]_n(x)dx\\ &=\alpha\int_E f(x)dx.\end{aligned}$$

若 $\alpha<0$，则 $(\alpha f)^+=0$，$(\alpha f)^-=(-\alpha)f$. 由定义 2.3 及上面所证，

$$\begin{aligned}\int_E \alpha f(x)dx &= -\int_E (\alpha f)^-(x)dx = -\int_E(-\alpha)f(x)dx\\ &=\alpha\int_E f(x)dx.\end{aligned}$$

当 $mE=+\infty$ 时，以及 f 为 E 上的一般可积函数时，容易证明 (2.4) 式仍然成立. □

定理 2.9 （绝对可积性）设 f 是可测集 E 上的可测函数，则 f 在 E 上可积的充分必要条件是 $|f|$ 在 E 上可积. 当 f 可积时，有

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|dx.$$

证明 必要性. 设 f 在 E 上可积，则 f^+ 和 f^- 在 E 上可积. 从而 $|f|=f^++f^-$ 在 E 上也可积.

充分性. 设 $|f|$ 在 E 上可积，由于 $f^+\leqslant|f|$，$f^-\leqslant|f|$. 故 f^+

和 f^- 在 E 上可积. 从而 $f=f^+-f^-$ 在 E 上可积.

当 f 可积时,

$$\begin{aligned}\int_E |f(x)|\,dx &= \int_E f^+(x)\,dx + \int_E f^-(x)\,dx \\ &\geqslant \left| \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx \right| \\ &= \left| \int_E f(x)\,dx \right|. \qquad \square\end{aligned}$$

定理 2.9 说明 L-积分是一种具有绝对可积性的积分. 这一点有别于 R-积分理论中的广义积分. 因此 Riemann 广义积分中的有关结论, 对 L-积分来讲并不都是适用的. 下面的例子表明, 广义 R-可积函数并不一定是 L-可积的, 这一点读者务必要注意.

例 1 考虑[0,1]上的函数 f.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 若\ x\in(0,1],\\ 0, & 若\ x=0.\end{cases}$$

读者熟知,函数 f 是广义 R-可积的. 但是 $|f|$ 不是 L-可积的.

事实上, f 在 $\left[\dfrac{1}{n},1\right]$ 上有界且 $|f(x)|=\dfrac{1}{x}\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$, 故 f 在 $\left[\dfrac{1}{n},1\right]$ 上是 R-可积的,从而是 L-可积的. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &\geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 |f(x)|\,dx \\ &= (R)\int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\left|\sin\frac{1}{x}\right| dx \to +\infty \quad (n\to\infty).\end{aligned}$$

这说明 $|f|$ 在[0,1]上不是 L-可积的. 因此 f 在[0,1]上也不是 L-可积的.

定理 2.10 (绝对连续性)设 f 在可测集 E 上可积, 则对任意

的 $\varepsilon>0$，存在着 $\delta>0$，使得当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时，有

$$\left|\int_A f(x)dx\right|<\varepsilon.$$

证明 设 $\{E_k\}$ 是一列单调增加，测度有限的可测集，且 $E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$. 由于 f 在 E 上可积，故 $|f|$ 在 E 上也可积. 从而对任意的 $\varepsilon>0$，存在着 $k,n\in\mathbf{N}$. 使得

$$\int_{E\setminus E_k}|f|\,dx=\int_E|f|\,dx-\int_{E_k}|f|\,dx<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\int_{E_k}(|f|-[|f|]_n)\,dx<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $\delta=\frac{\varepsilon}{3n}$，则当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时

$$\begin{aligned}\left|\int_A f\,dx\right|&\leqslant\int_A|f|\,dx\\&=\int_{A\setminus A\cap E_k}|f|\,dx+\int_{A\cap E_k}(|f|-[|f|]_n)\,dx+\\&\quad+\int_{A\cap E_k}[|f|]_n\,dx\\&\leqslant\int_{E\setminus E_k}|f|\,dx+\int_{E_k}(|f|-[|f|]_n)\,dx\\&\quad+\int_A[|f|]_n\,dx\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+n\cdot mA\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

□

习　题

1. 设 g 在可测集 E 上可积，且 $g\geqslant0$. f 是 E 上的可测函数，$0\leqslant f\leqslant g$，证明 f 在 E 上可积. 且有

$$\int_E f(x)dx \leqslant \int_E g(x)dx.$$

2. 设 f 在可测集 E 上可积，E_0 是 E 的可测子集. 证明 f 在 E_0 上也可积.

3. 设 $mE>0$, f 是 E 上的可积函数，且在 E 上 $f>0(a.e.)$. 证明

$$\int_E f(x)dx>0.$$

4. 设 f 是可测集 E 上的可积函数. 若对于任意的可测集 $e\subset E$，都有

$$\int_e f(x)dx=0.$$

证明 f 在 E 上几乎处处等于零.

5. 设 f 是可测集 E 上的可积函数. 若对于任意的 E 上的有界可测函数 φ 都有

$$\int_E f(x)\varphi(x)dx=0.$$

证明 f 在 E 上几乎处处等于零.

6. 设 $mE<+\infty$, f 是 E 上的非负可测函数，令 $E_n=E(n-1\leqslant f<n)$，证明 f 在 E 上非负可积的充分必要条件是 $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot mE_n<+\infty$.

7. 设 $mE<+\infty$, f 在 E 上可积. 令 $e_n=E(f\geqslant n)$. 证明 $\lim_{n\to\infty} n(me_n)=0$.

8. 设 f 是 $[a,b]$ 上的可积函数. 试证明对任意的 $\varepsilon>0$，必存在 $[a,b]$ 上的连续函数 φ，使

$$\int_a^b |f-\varphi|dx<\varepsilon.$$

§3 积分的极限定理

在本节中，我们将给出几个求积分与求极限交换次序的重要定理. 从这些定理中我们可以看到在 L-积分中，积分与极限交换次序的条件比起 R-积分来要弱得多. 这正是 L-积分的优越性.

若把定义 2.1 与定义 2.2 合起来考虑，则它们给出了可测集 E 上的非负可测函数 f 的积分的定义. 我们在下面的引理中给出积分定义的另一种等价形式.

引理 3.1 设 f 是可测集 E 上的非负可测函数，则

$$\int_E f(x)dx = \sup_{\varphi < f} \int_E \varphi(x)dx. \tag{3.1}$$

其中上确界是对所有满足如下条件的有界可测函数 φ 而取的：(a) $0 \leqslant \varphi \leqslant f$; (b) $mE(\varphi \neq 0) < +\infty$.

证明 设所有满足条件(a)和(b)的有界可测函数 φ 的全体记为 $\mathscr{B}_f$. 易见每一个 $\varphi \in \mathscr{B}_f$ 在 E 上皆可积. 且

$$\int_E f(x)dx \geqslant \int_E \varphi(x)dx.$$

故

$$\int_E f(x)dx \geqslant \sup_{\varphi < f} \int_E \varphi(x)dx. \tag{3.2}$$

若(3.2)式右端为 $+\infty$，则(3.1)式成立.

现设(3.2)式的右端 $< +\infty$，或者说 $\left\{\int_E \varphi(x)dx \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{B}_f\right\}$ 是有

界的．设$\{E_k\}$是一列单调增加测度有限的可测集，且$E=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k$.

由定义 2.1 与定义 2.2

$$\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{E_k}[f]_n(x)dx. \tag{3.3}$$

定义E上的函数$\varphi_{n,k}=[f]_n \mathbf{1}_{E_k}$，即对每一个$x\in E$，有

$$\varphi_{n,k}(x)=\begin{cases}[f]_n(x), & 若\ x\in E_k,\\ 0, & 若\ x\in E\setminus E_k,\end{cases}\quad (n,k\in\mathbf{N}),$$

则$\varphi_{n,k}\in\mathscr{B}_f\ (n,k\in\mathbf{N})$且

$$\int_E\varphi_{n,k}(x)dx=\int_{E_k}[f]_n(x)dx.$$

由(3.3)式知，对任意的$\varepsilon>0$，存在$n,k\in\mathbf{N}$，使得

$$\int_E\varphi_{n,k}(x)dx=\int_{E_k}[f]_n(x)dx>\int_E f(x)dx-\varepsilon.$$

故

$$\sup_{\varphi\leqslant f}\int_E\varphi(x)dx\geqslant\int_E f(x)dx.$$

因此，由上式及(3.2)式得到(3.1)式成立．□

定理 3.2 (Levi 定理) 设$\{f_n\}$是可测集E上的一列可测函数．若对每一个$x\in E$，有

(1) $0\leqslant f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant\cdots\leqslant f_n(x)\leqslant\cdots$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$.

则

$$\int_E f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{3.4}$$

证明 由条件(1)及第三章推论 3.7 知，f是E上的非负可测函数．由于对每一个$n\in\mathbf{N}$，有$f_n\leqslant f$，故

$$\int_E f_n(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx,$$

令 $n\to\infty$ 得

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\leqslant\int_E f(x)dx. \tag{3.5}$$

下面来证明相反的不等式成立. 我们仍沿用引理 3.1 证明中的记号 $\mathscr{B}_f$, 对于任意的 $\varphi\in\mathscr{B}_f$, 及任意满足: $0<c<1$ 的数 c. 对每一个 $n\in\mathrm{N}$, 令

$$E_n=E(f_n\geqslant c\varphi)=\{x\in E\mid f_n(x)\geqslant c\varphi(x)\},$$

则每一个 E_n 可测(见第三章 § 3 习题 2). $E_1\subset E_2\subset\cdots\subset E_n\subset\cdots$, 且 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 因为 $0\leqslant\varphi\leqslant f$, 因此对于 $x\in E$, 若 $f(x)=0$, 则 $x\in E_1$; 若 $f(x)>0$, 而 $\varphi(x)>c\varphi(x)$, 则存在 $n\in\mathrm{N}$, 使得 $x\in E_n$. 容易看出

$$\int_E f_n(x)dx\geqslant\int_{E_n} f_n(x)dx\geqslant c\int_{E_n}\varphi(x)dx \qquad (n\in\mathrm{N}). \tag{3.6}$$

记 $A=E(\varphi\neq0)$, 则 $mA<+\infty$. 由于 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(E_n\cap A)$, 故当 $n\to\infty$时,

$$\int_{E_n}\varphi(x)dx=\int_{E_n\cap A}\varphi(x)dx\to\int_A\varphi(x)dx=\int_E\varphi(x)dx.$$

因此, 当 $n\to\infty$ 时, 由(3.6)式得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\geqslant c\int_E\varphi(x)dx.$$

由 c 的任意性$(0<c<1)$, 我们得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\geqslant\int_E\varphi(x)dx.$$

由于 φ 是 $\mathscr{B}_f$ 中的元素, 由引理 1 可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx\geqslant\int_E f(x)dx,$$

由上式及(3.5)式,便得到(3.4)式. ∎

定理 3.3 (逐项积分定理)设$\{f_n\}$是可测集 E 上的一列非负可测函数,且 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\quad(x\in E)$,则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

证明 由于$\left\{\sum_{n=1}^{m}f_n\right\}$是$E$上的一列单调增加的可测函数,且对每一个 $x\in E$, $\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}f_n(x)=f(x)$. 由定理 3.2,则有

$$\int_E f(x)dx=\lim_{m\to\infty}\int_E\sum_{n=1}^{m}f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx.\quad ∎$$

定理 3.4 (积分的可数可加性) 设 f 是可测集E上的可积函数,$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$,其中$\{E_n\}$是一列互不相交的可测集,则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f(x)dx.$$

证明 对 f^+,定义 $f_n=f^+\cdot 1_{E_n}$,即对每一个 $x\in E$,

$$f_n(x)=\begin{cases}f^+(x), & 若\ x\in E_n,\\ 0, & 若\ x\in E\setminus E_n,\end{cases}$$

则 $f^+=\sum_{n=1}^{\infty}f_n$. 应用定理 3.3

$$\int_E f^+(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_E f_n(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}f^+(x)dx.$$

同样可得

$$\int_E f^-(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)dx.$$

由于 f 在 E 上可积，则

$$\begin{aligned}\int_E f(x)dx &= \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^+(x)dx - \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f^-(x)dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n} f(x)dx.\end{aligned}$$ □

定理 3.5 (Fatou 引理)若 $\{f_n\}$ 是可测集 E 上的一列非负可测函数，则

$$\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{3.7}$$

证明 对每一个 $n\in\mathbf{N}$，令 $g_n=\inf\{f_n, f_{n+1}, \cdots\}$，则 $\{g_n\}$ 是 E 上一列单调增加的非负可测函数，且对每一个 $x\in E$，

$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x).$$

由 Levi 定理(定理 3.2)并注意到 $g_n \leqslant f_n$，则

$$\begin{aligned}\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx \\ &= \varliminf_{n\to\infty}\int_E g_n(x)dx \\ &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.\end{aligned}$$ □

注 Fatou 引理中的不等式(3.7)在某些情况下，可能是严格的不等式. 例如，考虑区间[0,1]上的函数序列$\{f_n\}$，其定义为

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & 若\ x\in\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right), \\ 0, & 若\ x\in[0,1]\setminus\left(0,\ \dfrac{1}{n}\right), \end{cases}$$

则对每一个 $x\in[0,1]$，有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，因而 f 在$[0,1]$上的积分为零．但是 f_n 在$[0,1]$上的积分为 1，故

$$\int_{[0,1]} f(x)dx<\lim_{n\to\infty}\int_{[0,1]} f_n(x)dx.$$

定理 3.6 (Lebesgue 控制收敛定理)设

(1) $\{f_n\}$是可测集E上的一列可测函数，

(2) 对每一个 $n\in\mathbf{N}$，在E上皆有$|f_n|\leqslant g\ (a.e.)$，且 g 在E上可积．

(3) 在E上$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)\quad(a.e.)$．

则 f 在E上可积，且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{3.8}$$

证明 由于在零测度集上函数的积分为零．我们不妨设$|f_n|\leqslant g\ (n\in\mathbf{N})$且 $f_n(x)$处处收敛于 $f(x)$．那末 $g-f_n\geqslant0$，且对每一个 $x\in E$，有

$$\varliminf_{n\to\infty}[g(x)-f_n(x)]=\lim_{n\to\infty}[g(x)-f_n(x)]=g(x)-f(x).$$

由于$|f_n|\leqslant g$，因而$|f|\leqslant g$．由 g 在E上可积，得到每一个 f_n 及 f 在E上可积．应用 Fatou 引理，我们得到

$$\int_E[g(x)-f(x)]dx\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int_E[g(x)-f_n(x)]dx.$$

从而

$$\int_E g(x)dx-\int_E f(x)dx\leqslant\int_E g(x)dx-\varlimsup_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

因此

$$\int_E f(x)dx \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx.$$

同理，从 $g+f_n\geqslant 0$，我们又可以得到

$$\int_E f(x)dx \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\int_E f_n(x)dx.$$

由上面的两个不等式，便得到(3.8)式. □

Lebesgue 控制收敛定理是一个重要的定理，它具有广泛的应用. 定理中的函数 g 常称为控制函数. 当 $mE<+\infty$ 时，此定理有下面的推论.

推论 3.7 （有界收敛定理）设

(1) $mE<+\infty$,

(2) $\{f_n\}$是可测集 E 上的一列可测函数，

(3) 对每一个 $n\in\mathrm{N}$，在 E 上皆有 $|f_n(x)|\leqslant M$ $(a.e.)$，这里 M 为常数，

(4) 在 E 上 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ $(a.e.)$.

则 f 在 E 上可积，且

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$$

Lebesgue 控制收敛定理（定理 3.6）以及它的推论（推论 3.7）中，函数列"几乎处处收敛"的条件可以改变为"依测度收敛". 这时定理 3.6 就推广为下面的定理.

定理 3.8 设

(1) $\{f_n\}$是可测集 E 上的一列可测函数，

(2) 对每一个 $n\in\mathrm{N}$，在 E 上皆有 $|f_n|\leqslant g$ $(a.e.)$ 且 g 在 E 上可积，

(3) 在 E 上 $f_n \xrightarrow{m} f$.

则 f 在 E 上可积，且

$$\int_E f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx. \tag{3.9}$$

证明 (1) 先设 $mE<+\infty$. 由于 $f_n\xrightarrow{m}f$ 根据 Riesz 定理(第三章定理 4.7)$\{f_n\}$有子序列$\{f_{n_i}\}$几乎处处收敛于 f. 由$|f_{n_i}|\leqslant g(a.e.)$，令 $i\to\infty$，便得$|f|\leqslant g(a.e.)$. 由条件 (2)，g 在 E 上可积，故 f 在 E 上可积. 同样可知每一个 f_n 在 E 上可积.

对任意的 $\varepsilon>0$，由于 g 可积及积分的绝对连续性，存在 $\delta>0$，使得当 $A\subset E$ 且 $mA<\delta$ 时，有

$$\int_A g(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.10}$$

对每一个 $n\in\mathrm{N}$，令 $A_n=E\left(|f_n-f|\geqslant\frac{\varepsilon}{2mE}\right)$. 由于 f_n 依测度收敛于 f，有 $mA_n\to0(n\to\infty)$. 因此，对上面找到的 δ，存在 $n_0\in\mathrm{N}$，使得当 $n>n_0$ 时，$mA_n<\delta$. 从而由(3.10)式知

$$\int_{A_n}g(x)dx<\frac{\varepsilon}{4}\quad(n>n_0).$$

这样，当 $n>n_0$ 时，

$$\begin{aligned}\left|\int_E f_n dx-\int_E f dx\right|&\leqslant\int_E|f_n-f|dx\\&=\int_{A_n}|f_n-f|dx+\int_{E\setminus A_n}|f_n-f|dx\\&\leqslant\int_{A_n}2g dx+\int_E\frac{\varepsilon}{2mE}dx\\&<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2mE}\cdot mE\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

故(3.9)式得证.

(2) 对一般的可测集 E (mE 可以为有限或无穷)由与(1)中同

样的证明可知，f在E上可积．取一列单调增加测度有限的可测集$\{E_n\}$，使得$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 由于函数$g$在$E$上可积．对任意的$\varepsilon>0$，存在充分大的$n_0\in\mathbf{N}$，使得

$$\int_E g(x)dx-\int_{E_{n_0}}g(x)dx=\int_{E\setminus E_{n_0}}g(x)dx<\frac{\varepsilon}{4},$$

在E_{n_0}上，由(1)有

$$\int_{E_{n_0}}f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_{E_{n_0}}f_n(x)dx.$$

故存在$N\in\mathbf{N}$，使得当$n>N$时

$$\left|\int_{E_{n_0}}f(x)dx-\int_{E_{n_0}}f_n(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当$n>N$时

$$\begin{aligned}\left|\int_E f dx-\int_E f_n dx\right|&\leqslant\left|\int_{E_{n_0}}f dx-\int_{E_{n_0}}f_n dx\right|+\int_{E\setminus E_{n_0}}|f|dx\\&\quad+\int_{E\setminus E_{n_0}}|f_n|dx\\&<\frac{\varepsilon}{2}+2\int_{E\setminus E_{n_0}}|g|dx\\&<\frac{\varepsilon}{2}+2\cdot\frac{\varepsilon}{4}\\&=\varepsilon.\end{aligned}$$

□

习　题

1．求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{\frac{1}{2}}}{1+n^2x^2}dx.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-nx^2}dx.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+|\sin x|}dx$.

2. 试从$\frac{1}{1+x}=(1-x)+(x^2-x^3)+\cdots(x\in(0,1))$推证

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

3. 设$\{f_n\}$是可测集E上的一列可积函数，且在E上$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$(a.e). 证明:若存在常数$k>0$使

$$\int_E |f_n(x)|dx\leqslant k \qquad (n\in\mathrm{N}),$$

则f在E上可积.

4. 设$mE<+\infty$，$\{f_n\}$是可测集E上一列几乎处处有限的可测函数. 证明:

$$\int_E \frac{|f_n(x)|}{1+|f_n(x)|}dx \longrightarrow 0$$

的充分必要条件是$f_n \xrightarrow{m} 0$.

5. 设$\{f_n\}$是可测集E上的一列非负可测函数，在E上$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ (a.e.)，f是E上的可积函数. 并且

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

试证，在E的任意可测子集e上

$$\lim_{n\to\infty}\int_e f_n(x)dx=\int_e f(x)dx.$$

6. 设f是可测集E上的非负可测函数，对每一个正整数n，定义函数$(f)_n$，使得对每一个$x\in E$

$$(f)_n(x)=\begin{cases}f(x), & 若 f(x)\leqslant n,\\ 0, & 若 f(x)>n.\end{cases}$$

证明:若f在E上几乎处处有限，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_E (f)_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

7. 证明:若函数f在区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$上可积($\varepsilon>0$)，则

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

§4 Fubini 定理

在 R-积分的理论中，我们曾讨论了重积分与累次积分的关系. 本节的中心问题是要对 L-积分建立相应的定理，即 Fubini 定理. 人们发现在交换积分次序的问题上，L-积分比 R-积分的条件要弱得多,这也是 L-积分比 R-积分优越的地方.

为了建立 Fubini 定理,我们还得先讨论一下乘积空间的测度问题. 我们希望在讨论中具有更多的直观性，因而在另一方面就不能同时顾及到理论的严谨性. 在理论方面的进一步探讨是属于抽象测度理论所研究的范畴.

回顾我们在数直线 $\mathbf{R}$ 上建立 Lebesgue 测度的方法. 它很容易推广到 $\mathbf{R}^n$ 上,建立 $\mathbf{R}^n$ 上的 Lebesgue 测度. 对照在 $\mathbf{R}$ 中区间的长度,在 $\mathbf{R}^n$ 中有"广义长方体"的"体积";对照 $\mathbf{R}$ 中集合外测度的定义,可定义 $\mathbf{R}^n$ 中集合的外测度是覆盖它的一列开广义长方体体积之和的下确界； 由 $\mathbf{R}$ 上的外测度以及 Carathéodory 判别法则,可定义 $\mathbf{R}$ 中集合可测的概念,于是用同样的办法可定义 $\mathbf{R}^n$ 中集合可测的概念. 因此,$\mathbf{R}$ 中可测集的有关概念和性质,完全可以类推到 $\mathbf{R}^n$ 中来.

与 $\mathbf{R}$ 中定义可测集 E 上的可测函数及它的 Lebesgue 积分的方法完全相同,只要将 E 视为 $\mathbf{R}^n$ 中的可测集,我们可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中可测集 E 上的可测函数及它的 L-积分.

考虑 $\mathbf{R}^p$, $\mathbf{R}^q$ 与它们的乘积空间 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q=\mathbf{R}^{p+q}$. 设 $E\subset\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$,对于 $x\in\mathbf{R}^p$,令

$$E_x=\{y\in\mathbf{R}^q\mid(x,y)\in E\},$$

我们称 E_x 为 E 关于 x 的截口(cross-section). 同样,我们称

$$E_y=\{x\in\mathbf{R}^p\mid(x,y)\in E\}.$$

为 E 关于 y 的截口.

设 $f(x,y)$ 是定义在 $\mathrm{R}^p\times\mathrm{R}^q$ 上的函数. 对于 $x\in\mathrm{R}^p$, 视 x 固定,则 y 的函数

$$f_x(y)=f(x,y),$$

称为 f 关于 x 的截口,$f_x(y)$ 是定义在 R^q 上的函数.

同样,对于固定的 $y\in\mathrm{R}^q$,x 的函数

$$f_y(x)=f(x,y),$$

称为 f 关于 y 的截口.

在讨论 Fubini 定理之前, 我们要引进两个引理,这两个引理的直观含义是容易理解的,但是它们的证明则比较繁,故略去了.

引理 4.1 设 $E\subset\mathrm{R}^{p+q}$ 是可测集, 则 E_x 几乎对所有的 $x\in\mathrm{R}^p$ 可测,即 mE_x 几乎处处在 R^p 上有定义,并且

$$mE=\int_{R^p}mE_x dx.$$

引理 4.2 设 A 和 B 分别是 R^p 和 R^q 中的可测集, 则 $A\times B$ 是 R^{p+q} 中的可测集,且

$$m(A\times B)=mA\cdot mB.$$

定义 4.3 设 f 是 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的非负函数,令

$$G(E,f)=\{(x,y)\mid x\in E,0\leqslant y<f(x)\},$$

则 $G(E,f)$ 称为 f 在 E 的下方图形.

下面的定理说明了非负可测函数积分的几何意义.

定理 4.4 设 f 是可测集 $E\subset\mathrm{R}^n$ 上的非负函数,则

(1) f 在 E 上可测的充分必要条件是 $G(E,f)$ 是 R^{n+1} 中的可测集.

(2) 当 f 在 E 上可测时,

$$\int_E f(x)dx=mG(E,f).$$

证明 (1) 必要性. 设 $f(x)=c$(常数)$\geqslant 0(x\in E)$,则

$$G(E,f)=\begin{cases}E\times[0,c), & 若 c>0,\\ \varnothing, & 若 c=0.\end{cases}$$

由引理 4.2 知,$G(E,f)$是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的可测集.

设 f 是 E 上的简单函数，即 $f=\sum_{k=1}^{n}c_k\mathbf{1}_{E_k}$，其中各个 E_k 可测且互不相交，$E=\bigcup_{k=1}^{n}E_k$．由前面已证的结论．$G(E_k, f|_{E_k})$可测，故

$$G(E,f)=\bigcup_{k=1}^{n}G(E_k,f|_{E_k})$$

可测.

设 f 是 E 上的非负可测函数．由第三章的定理3.11．存在一列单调增加的非负简单函数$\{\varphi_n\}$,使得对每一个 $x\in E$,

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x).$$

易知,$G(E,\varphi_1)\subset G(E,\varphi_2)\subset\cdots$,且

$$G(E,f)=\bigcup_{n=1}^{\infty}G(E,\varphi_n).$$

由上面已证的结论可知,各$G(E,\varphi_n)$可测．故$G(E,f)$可测.

充分性．设$G(E,f)$是 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的可测集,由引理4.1,$m(G(E,f))_x$ 为几乎处处在 $\mathbf{R}^n$ 上有定义的可测函数．从

$$(4.1)\qquad m(G(E,f))_x=\begin{cases}f(x), & 若 x\in E,\\ 0, & 若 x\in\mathbf{R}^n\setminus E\end{cases}$$

知, f 是定义在 E 上的可测函数.

(2) 当 f 在 E 上可测时,(4.1)式成立．再应用引理4.1

$$mG(E,f)=\int_{\mathbf{R}^n}m(G(E,f))_x dx=\int_E f(x)dx.\qquad \square$$

推论 4.5 设 f 是可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可积函数，则

$$\int_E f(x)dx = mG(E,f^+) - mG(E,f^-).$$

推论 4.6 设 f 是可测集 $E\subset\mathbf{R}^n$ 上的可测函数，则 E 可积的充分必要条件是 $mG(E,f^+)$ 与 $mG(E,f^-)$ 皆为有限.

定理 4.7 (Fubini 定理)

(1) 设 f 是 $A\times B\subset\mathbf{R}^{p+q}$ 上的非负可测函数（其中 A 与 B 分别是 $\mathbf{R}^p$ 与 $\mathbf{R}^q$ 中的可测集)，则几乎对所有的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可测，且

$$\int_{A\times B} f(u)du = \int_A dx\int_B f(x,y)dy. \tag{4.2}$$

(2) 若 f 在 $A\times B$ 上可积时，则几乎对所有的 $x\in A$，$f(x,y)$ 作为 y 的函数在 B 上可积. 又 $\int_B f(x,y)dy$ 作为 x 的函数在 A 上可积，且(4.2)式成立.

证明 由定义对 $A\times B$ 上的函数 f，可作一个函数 f'，使得

$$f'(u)=f'(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & \text{若}(x,y)\in A\times B,\\ 0, & \text{若}(x,y)\in\mathbf{R}^{p+q}\setminus A\times B,\end{cases}$$

则由 f 可测，可知 f' 在 $\mathbf{R}^{p+q}$ 上可测，且

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f'(u)du = \int_{A\times B} f(u)du.$$

关于 x 的截口的积分有

$$\int_{\mathbf{R}^q} f'_x(y)dy = \int_B f_x(y)dy.$$

容易看出，当 $x\notin A$ 时上式左端的值为零，故

$$\int_{\mathbf{R}^p} dx\int_{\mathbf{R}^q} f'_x(y)dy = \int_A dx\int_B f_x(y)dy.$$

同理，关于 y 的截口的积分有类似的结果. 因此，我们不妨假设

$A=\mathbf{R}^p, B=\mathbf{R}^q$.

(1) 设 f 在 $A\times B$ 上非负可测，由定理 4.4，$G(A\times B, f)$是 $\mathbf{R}^{p+q+1}$ 中的可测集，且

$$mG(A\times B, f)=\int_{A\times B} f(u)du.$$

由引理 4.1 知，几乎对所有的 $x\in A$，有$(G(A\times B, f))_x$ 可测. 且

$$mG(A\times B, f)=\int_A m(G(A\times B, f))_x dx.$$

容易看出

$$(G(A\times B, f))_x=G(B, f_x),$$

这里 f_x 是 f 关于 x 的截口(即 $f_x(y)=f(x,y)$, $(y\in B)$). 故

$$\int_{A\times B} f(u)du=\int_A mG(B, f_x)dx=\int_A dx\int_B f(x,y)dy.$$

(2) 若$f(u)$在$A\times B$上可积时，f^+与f^-在$A\times B$ 上皆可积. 故由(1)知，几乎对所有的 $x\in A$，f^+与 f^-在 B 上可积. 并且积分

$$\int_B f_x^+(y)dy \text{ 与 } \int_B f_x^-(y)dy$$

作为 x 的函数在 A 上可积，从而在 A 上几乎处处有限，因此我们得到

$$\begin{aligned}\int_{A\times B} f(u)du &=\int_{A\times B} f^+(u)du-\int_{A\times B} f^-(u)du\\ &=\int_A dx\int_B f^+(x, y)dy-\int_A dx\int_B f^-(x,y)dy\\ &=\int_A\left[\int_B (f^+(x,y)-f^-(x,y))dy\right]dx\\ &=\int_A dx\int_B f(x,y)dy.\end{aligned}$$

□

注 在定理 4.7 的条件下，在证明中适当对换 x 与 y，可以得到：

$$\int_{A\times B} f(u)\,du=\int_A dx\int_B f(x,y)\,dy=\int_B dy\int_A f(x,y)\,dx.$$

这样，由 Fubini 定理可知，只要重积分存在，则它的两个累次积分也存在．并且三者是彼此相等的；对于两个累次积分而言，交换积分次序的条件则是比较弱的．

例 1 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 是定义在 $E=(0,1)\times(0,1)$ 上的函数，则可算出

$$\int_{(0,1)} dx\int_{(0,1)} f(x,\ y)\,dy=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_{(0,1)} dy\int_{(0,1)} f(x,y)\,dx=\int_0^1\frac{-1}{1+y^2}dy=-\frac{\pi}{4}.$$

由 Fubini 定理，可以断定 f 在 $(0,1)\times(0,1)$ 上不可积．

下面我们再举一例说明，虽然函数的两个累次积分存在且相等，但是这样的函数仍有可能是不可积的．

例 2 在 $\mathbf{R}^2$ 上定义二元函数 f，使得

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2}, & 若 (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & 若 (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

容易算出

$$\int_0^{\infty} f(x,y)\,dy=\frac{1}{2x},$$

且

$$\int_{-\infty}^0 f(x,y)\,dy=-\frac{1}{2x}.$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=0.$$

同理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 0.$$

这表明 f 的两个累次积分存在且相等. 但是我们可以证明 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上是不可积的. 事实上,假设 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上可积,则 $|f|$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上也可积. 然而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x,y)|\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|}\,dx \\ &= +\infty.\end{aligned}$$

这与 f 的可积性矛盾. 因此 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上不可积.

习　　题

1. 设 f 在 $\mathbf{R}^p$ 上可积, g 在 $\mathbf{R}^q$ 上可积. 证明: $f\cdot g$ 在 $\mathbf{R}^p\times\mathbf{R}^q$ 上可积. 且有

$$\int_{\mathbf{R}^{p+q}} f(x)g(y)\,dx\,dy = \left(\int_{\mathbf{R}^p} f(x)\,dx\right)\left(\int_{\mathbf{R}^q} g(y)\,dy\right).$$

2. 在 $E=(0,1)\times(0,1)$ 上定义函数 f, 使得

$$f(x,y)=\frac{1}{x^{\alpha}(1-y)^{\beta}} \qquad 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1.$$

证明: f 在 E 上可积, 并求其积分值.

3. 在 $E=(0,1)\times(0,1)$ 上定义的函数 f, 使得

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & \text{当}(x,y)\text{为}E\text{中的有理点时},\\ 0\quad, & \text{当}(x,y)\text{为}E\text{中的其他点时}.\end{cases}$$

其中 q_x, q_y 分别为 x, y 相应的既约分数的分母. 求

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy.$$

4. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

$\left(\right.$提示: 注意到 $\int_0^n \frac{\sin x}{x}dx = \int_0^n\left(\int_0^\infty e^{-xt}dt\right)\sin x\,dx$, 然后应用 Fubini 定理. $\left.\right)$

§5 有界变差函数

定义 5.1 设 f 是定义在区间 $[a, b]$ 上的实值函数，给 $[a,b]$ 一组分点：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b.$$

得到 $[a,b]$ 的一个分划，记为 σ. 令

$$\bigvee_a^b(f,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|.$$

若存在常数 $M>0$，使得对 $[a,b]$ 的任意分划 σ 皆有 $\bigvee_a^b(f,\sigma)\leqslant M$，则 f 称为 $[a,b]$ 上的有界变差函数 (function of bounded variation)，$[a,b]$ 上有界变差函数的全体，记为 $BV[a,b]$. 当 $f\in BV[a,b]$ 时，令

$$\bigvee_a^b(f)=\sup_{\sigma}\bigvee_a^b(f,\sigma).$$

则 $\bigvee_a^b(f)$ 称为 f 的全变差(total variation).

当 $a=b$ 时，我们记 $\bigvee_a^b(f)=0$.

当 $f\notin BV[a,b]$ 时，我们有时也记 $\bigvee_a^b(f)=+\infty$.

有界变差函数具有以下明显的性质.

引理 5.2 若 $f\in BV[a,b]$，则对任意的数 $x\in[a,b]$，f 在 $[a,x]$ 上的限制 $f|_{[a,x]}\in BV[a,x]$. (为了记号简单起见，下面我们常记为 $f\in BV[a,x]$，这时把 f 看作为 $[a,x]$ 上的函数) 对于 $x\in[a,b]$，若令

$$S(x)=\bigvee_a^x(f).$$

则 S 是定义在 $[a, b]$ 上的单调增加的非负函数. 即当 $x_1<x_2$，$x_1, x_2\in[a,b]$ 时，$0\leqslant S(x_1)\leqslant S(x_2)$.

引理 5.3 设 f 是 $[a,b]$ 上的函数，若对于任意的 $c\in(a,b)$ 皆有 $f\in BV[a,c]$ 及 $f\in BV[c,b]$，则 $f\in BV[a,b]$，且

$$\mathrm{V}_a^b(f)=\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).$$

证明 对$[a,b]$的任意一个分划σ:

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b.$$

若c是σ的一个分点,如$c=x_{i_0}$,则可将σ分为两个分划σ_1与σ_2,即

σ_1: $\quad a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{i_0}=c.$

σ_2: $\quad c=x_{i_0}<x_{i_0+1}<\cdots<x_n=b.$

于是

$$\begin{aligned}(5.1)\qquad \mathrm{V}_a^b(f,\sigma)&=\mathrm{V}_a^c(f,\sigma_1)+\mathrm{V}_c^b(f,\sigma_2)\\&\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).\end{aligned}$$

若c不是σ的一个分点,设$x_j<c<x_{j+1}$,则添加一个分点c之后得到两个分划p^*与p^{**},即

p^*: $a=x_0<x_1<\cdots<x_j<c=c.$

p^{**}: $c=c<x_{j+1}<\cdots<x_n=b.$

由于

$$|f(x_{j+1})-f(x_j)|\leqslant|f(x_{j+1})-f(c)|+|f(c)-f(x_j)|.$$

我们得到

$$\begin{aligned}(5.2)\qquad \mathrm{V}_a^b(f,\sigma)&\leqslant\mathrm{V}_a^c(f,p^*)+\mathrm{V}_c^b(f,p^{**})\\&\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).\end{aligned}$$

由(5.1)式与(5.2)式知,无论c是否为分划σ的分点,均有

$$(5.3)\qquad \mathrm{V}_a^b(f)\leqslant\mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f).$$

另一方面,设T_1与T_2分别是$[a,c]$和$[c,b]$的任意的两个分划. T是合并T_1与T_2的分点而得到的$[a,b]$的一个分划,则

$$\mathrm{V}_a^c(f,T_1)+\mathrm{V}_c^b(f,T_2)=\mathrm{V}_a^b(f,T)\leqslant\mathrm{V}_a^b(f).$$

由于分划T_1与T_2的任意性,便有

$$(5.4)\qquad \mathrm{V}_a^c(f)+\mathrm{V}_c^b(f)\leqslant\mathrm{V}_a^b(f).$$

由(5.3)式及(5.4)式得到

$$V_a^b(f)=V_a^c(f)+V_c^b(f).$$ ▯

什么函数是有界变差函数呢？我们先举两个例子.

例 1 设 f 是$[a,b]$上的单调增加的函数. 对$[a,b]$的任意一个分划 σ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 皆有

$$\begin{aligned}V_a^b(f,\sigma)&=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|=\sum_{i=1}^n(f(x_i)-f(x_{i-1}))\\&=f(x_n)-f(x_0)\\&=f(b)-f(a).\end{aligned}$$

由于 $f(b)-f(a)$是一个固定的常数. 故 $f\in BV[a,b]$.

同理可证$[a,b]$上的单调减少函数也是有界变差函数.

例 2 设 f 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件, 即存在常数$c>0$, 使得对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$, 均有

(5.5) $$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant c|x_2-x_1|.$$

则 $f\in BV[a,b]$.

证明 对$[a,b]$ 的任意一个分划 σ: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 由(5.5)式, 均有

$$\begin{aligned}V_a^b(f,\sigma)&=\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant\sum_{i=1}^n c|x_i-x_{i-1}|\\&=c(b-a).\end{aligned}$$

而 $c(b-a)$是一个固定的常数, 故 $f\in BV[a,b]$.

从上面的例子可以看到, 有界变差函数不一定是连续函数(因为单调函数不一定是连续的). 另一方面, 我们又指出, 连续函数不一定是有界变差函数(见本节习题 2)

定理 5.4 若 $f\in BV[a,b]$, 则 f 在$[a,b]$上有界

证明 因为 $f\in BV[a,b]$, 所以 $V_a^b(f)<+\infty$. 对任意的$x\in[a,b]$, 令 σ 是由 a,x,b 三点所构成的分划. 于是

$$|f(x)|-|f(a)|\leqslant|f(x)-f(a)|$$

$$\leqslant |f(x)-f(a)|+|f(b)-f(x)|$$
$$=\bigvee_a^b(f,\sigma)$$
$$\leqslant \bigvee_a^b(f).$$

从而对任意的 $x\in[a,b]$，有

$$|f(x)|\leqslant \bigvee_a^b(f)+|f(a)|.$$

由于上式右端为一个常数，故 f 在$[a,b]$上有界. □

定理 5.5 设 $f,g\in \mathrm{BV}[a,b]$，$\alpha\in\mathbf{R}$. 那末

(1) $f+g\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(2) $\alpha f\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(3) $fg\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(4) 若 $|f(x)|\geqslant\delta>0$，则 $\frac{1}{f}\in \mathrm{BV}[a,b]$.

证明 我们仅证明(1)、(3)，把(2)和(4)的证明留给读者自己去完成.

(1) 对于$[a,b]$的任意一个分划 σ:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

我们有

$$\bigvee_a^b(f+g,\sigma)=\sum_{i=1}^{n}|[f(x_i)+g(x_i)]-[f(x_{i-1})+g(x_{i-1})]|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|$$
$$=\bigvee_a^b(f,\sigma)+\bigvee_a^b(g,\sigma)$$
$$\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g).$$

故

$$\bigvee_a^b(f+g)\leqslant\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)<+\infty,$$

即 $f+g\in \mathrm{BV}[a,b]$.

(3) 由定理 5.4，存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 且 $|g(x)|\leqslant M$

$(x\in[a,b])$. 对于$[a,b]$的任意分划 σ, 我们有

$$\begin{aligned}\bigvee_a^b(fg,\sigma)&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)g(x_i)-f(x_{i-1})g(x_{i-1})|\\&=\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]+g(x_{i-1})\\&\qquad\cdot[f(x_i)-f(x_{i-1})]|\\&\leqslant M(\bigvee_a^b(f,\sigma)+\bigvee_a^b(g,\sigma))\\&\leqslant M(\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g)).\end{aligned}$$

故

$$\bigvee_a^b(fg)\leqslant M(\bigvee_a^b(f)+\bigvee_a^b(g))<+\infty,$$

即 $fg\in BV[a,b]$. □

定理 5.6 f 是$[a,b]$上的有界变差函数的充分必要条件是 f 可以表示为两个单调增加的非负函数之差.

证明 充分性. 设 f 在$[a,b]$上可以表示为两个单调增加的非负函数之差. 由例 1 知, 区间$[a,b]$上的单调函数必为有界变差函数, 再由定理 5.5 得 f 是有界变差函数. 故充分性得证.

必要性. 设 $f\in BV[a,b]$, 对于每一个 $x\in[a,b]$, 令 $s(x)=\bigvee_a^x(f)$. 由引理 5.2 知, s 是$[a,b]$上的单调增加的非负函数, 令

$$r(x)=s(x)-f(x)+f(a),$$

则 r 是$[a,b]$上的单调增加的非负函数. 因为对任意的 $x_1\leqslant x_2$, $x_1,x_2\in[a,b]$有

$$\begin{aligned}r(x_2)-r(x_1)&=s(x_2)-s(x_1)-[f(x_2)-f(x_1)]\\&=\bigvee_{x_1}^{x_2}(f)-[f(x_2)-f(x_1)]\\&\geqslant\bigvee_{x_1}^{x_2}(f)-|f(x_2)-f(x_1)|\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

对每一个 $x\in[a,b]$, 令

$$f_1(x)=s(x)+f(a)+|f(a)|,$$

$$f_2(x)=r(x)+|f(a)|,$$

则 f_1 与 f_2 是$[a,b]$上单调增加的非负函数．且 $f=f_1-f_2$．　□

习　　题

1．若函数 f 在$[a,b]$上的全变差等于 A，求函数 $kf+m$(k,m 为常数)在$[a,b]$上的全变差．

2．证明函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=0 \text{ 时},\\ x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时}.\end{cases}$$

在$\left[0,\dfrac{2}{\pi}\right]$上是连续函数，但不是有界变差函数．

3．把$[0,\pi]$上的有界变差函数 $f(x)=\cos^2 x$ 表示为两个单调增加函数之差．

4．把$[0,\ 2\pi]$上的有界变差函数 $f(x)=\sin x$ 表示为两个单调增加的函数之差．

5．求函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{当 } 0\leqslant x<1,\\ 5, & \text{当 } x=1,\\ x+3, & \text{当 } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

在$[0,2]$上的全变差 $\bigvee_0^2(f)$．并验证：$\bigvee_0^2(f)=\bigvee_0^1(f)+\bigvee_1^2(f)$．

6．设 f 是$[a,\ b]$上的有界变差函数，证明$|f|$也是$[a,\ b]$上的有界变差函数．

7．设 f 是$[a,b]$上的连续函数，$|f|$是$[a,b]$上的有界变差函数．证明 f 也是$[a,b]$上的有界变差函数．

8．设$\{f_n\}$是$[a,b]$上的一列有界变差函数，且存在常数 M，使得

$$\bigvee_a^b(f_n)\leqslant M \qquad (n\in\mathbf{N}).$$

证明：若存在$[a,b]$上的有限函数 f，使得对每一个 $x\in[a,b]$，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=$

$f(x)$，则 f 是$[a,b]$上的有界变差函数.

9. 证明：函数 f 是$[a,b]$上的有界变差函数的充分必要条件是，存在$[a,b]$上的增函数 φ，使得对任意的 $x_1,x_2\in[a,b]$，当 $x_1<x_2$ 时. 必有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant\varphi(x_2)-\varphi(x_1).$$

*§ 6 Stieltjes积分

在本节中，我们将介绍 Riemann-Stieltjes 积分，并简要地介绍 Lebesgue-Stieltjes 积分. 我们把这两种积分简称为 R-S积分与 L-S 积分. 它们分别是 R-积分与 L-积分的推广.

一、R-S 积分

先举一个实际问题的例子. 我们把一根直杆看作具有质量的线段$[a,b]$. 对于 $x\in[a,b]$，设 $m(x)$表示分布在线段$[a,x]$上的质量，m 是一个单调增加的函数. 我们现在要求$[a,b]$的质量M. 把这种类型的实际问题的求解方法一般化，可以把问题归结为下面形式的积分.

定义 6.1 设 f 和 g 是$[a,b]$上定义的有限函数. 对$[a,b]$作一个分划 T：

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b.$$

取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$$(i=1,2,\cdots,n)$，作和(我们称为 R-S 和)

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]. \tag{6.1}$$

若当 $n\to\infty$，且 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\to 0$时，和式(6.1)的极限存在，且此极限不依赖于$[a,b]$上的分划 T，也不依赖于 ξ_i 的选取方法，则称 f 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的 (R-S integrable)，并称这个极限值为 f 在$[a, b]$上关于 g 的 R-S 积分 (R-S integral)，记为

(6.2) $$\int_a^b f(x)dg(x)=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})].$$

显然，当 $g(x)=x$ 时，R-S 积分就是 R-积分．这说明 R-S 积分是 R-积分的推广．

与讨论 R-积分的大和与小和的情况类似，我们可以由和式(6.1)引入相应的大和与小和的概念，并借助于大和与小和的讨论，建立一个 R-S 积分存在的判别法．

定理 6.2 f 在$[a, b]$上关于 g 是 R-S 可积的．当且仅当下面的极限存在

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i[g(x_i)-g(x_{i-1})],$$

其中 ω_i 是 f 在$[x_{i-1}, x_i]$上的振幅，即最大值 M_i 与最小值 m_i 之差(M_i-m_i)．

定理 6.2 的证明与 R-积分中的证明方法类似．

由 R-S 积分的定义，我们可以推出 R-S 积分的一些性质．

定理 6.3

(1) 若 f_1 与 f_2 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的，则 f_1+f_2 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的，且

$$\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)]dg(x)=\int_a^b f_1(x)dg(x)+\int_a^b f_2(x)dg(x).$$

(2) 若 f 在$[a,b]$上分别关于 g_1 与 g_2 是 R-S 可积的，则 f 在$[a,b]$上关于 g_1+g_2 是 R-S 可积的，且

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x)+g_2(x)]=\int_a^b f(x)dg_1(x)+\int_a^b f(x)dg_2(x).$$

(3) 若 f 在$[a, b]$上关于 g 是 R-S 可积的，则对于任意的常数 α 和 β，αf 在$[a,b]$上关于 βg 是 R-S 可积的．且

$$\int_a^b \alpha f(x)d(\beta g(x))=\alpha\beta\int_a^b f(x)dg(x).$$

(4) 若 f 关于 g 分别在$[a,b]$，$[a,c]$及$[c,b]$上是 R-S 可积的($a<c<b$)，则

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x).$$

由 R-S 积分的定义，可以直接证得以上各个结论.

值得注意的是，若 f 关于 g 分别在$[a,c]$及$[c,b]$上 R-S 可积，我们不一定能够得到 f 关于 g 在$[a,b]$上 R-S 可积的结论. 下面的例子说明了这一点.

例 1 在$[-1,1]$上定义的两个函数 f 和 g，使得

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in[-1,0],\\ 1, & 若\ x\in(0,1].\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\in[-1,0),\\ 1, & 若\ x\in[0,1].\end{cases}$$

我们来证明 f 在$[-1,1]$上关于 g 不是 R-S 可积的.

事实上，对$[-1,1]$作一个分划 T：

$$-1=x_0<x_1<\cdots<x_{i_0-1}<x_{i_0}<\cdots<x_n=1$$

使得 $x_{i_0-1}<0<x_{i_0}$，取 $\xi_{i_0}\in[x_{i_0-1},x_{i_0}]$，则

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]=f(\xi_{i_0})$$

$$=\begin{cases}0, & 若\ \xi_{i_0}\leqslant 0,\\ 1, & 若\ \xi_{i_0}>0.\end{cases}$$

可见 σ 的极限是不存在的，即 f 在$[-1,1]$上关于 g 不是 R-S 可积的.

但是读者不难验证，f 关于 g 分别在$[-1,0]$及$[0,1]$上都是 R-S 可积的.

我们指出：若函数 g 在$[a,b]$上有界，而函数 f 在点 c($a<c<b$)处连续，则当积分

$$\int_a^c f(x)dg(x),\quad \int_c^b f(x)dg(x)$$

均存在时，积分$\int_a^b f(x)dg(x)$存在，且有

$$\int_a^b f(x)dg(x)=\int_a^c f(x)dg(x)+\int_c^b f(x)dg(x).$$

定理 6.4 若 f 在$[a,b]$上连续，g是$[a,b]$上的有界变差函数，则 f 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的.

证明 由于有界变差函数 g 可以表示为两个单调增加的函数之差. 故不妨设 g 是单调增加的函数. 对任意的 $\varepsilon>0$，由于 f 在闭区间$[a,b]$上一致连续，则存在 $\delta>0$，使得 f 在长度小于 δ 的区间上的振幅均小于$\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$. 于是对$[a,b]$的任意分划$T$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta$ 时，有 $\omega_i<\dfrac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$，且

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i[g(x_i)-g(x_{i-1})]<\frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)-g(x_{i-1})]=\varepsilon.$$

由定理6.2知. f 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的. □

定理 6.5 若 f 在$[a,b]$上连续，g 在$[a,b]$上可导，且其导函数 g' 在$[a,b]$上 R-可积，则 f 在 $[a,b]$ 上关于 g 是 R-S 可积的，且

$$\int_a^b f(x)dg(x)=(R)\int_a^b f(x)g'(x)dx. \tag{6.3}$$

证明 由 g 的导函数 g' 在$[a,b]$上R-可积，故知 g' 在$[a,b]$上有界. 由中值定理知 g 在$[a,b]$上满足 Lipschitz 条件. 从而有 $g\in\mathrm{BV}[a,b]$. 由定理 6.4 知 f 在$[a,b]$ 上关于 g 是 R-S 可积的. 由假设 fg' 在 $[a,b]$ 上是 R-可积的，于是 (6.3) 式两端的积分存在.

任取$[a,b]$的一个分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. 由中值定理

得

(6.4) $$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}).$$

其中 $\eta_i\in[x_{i-1},x_i]$. 应用 f 在$[a,b]$上的一致连续性，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\to 0$ 时，(6.4)式有

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)[g(x_i)-g(x_{i-1})]$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)g'(\eta_i)(x_i-x_{i-1}).$$

而上式两端分别为(6.3)式两端的积分，故(6.3)式成立. □

定理6.6 若$\int_a^b f(x)dg(x)$与$\int_a^b g(x)df(x)$中有一个存在，则另一个也必定存在，且

(6.5) $$\int_a^b f(x)dg(x)+\int_a^b g(x)df(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b.$$

证明 不妨设$\int_a^b f(x)dg(x)$存在，对$[a,b]$的任一分划 T: $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，有

$$\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)[f(x_i)-f(x_{i-1})]$$

$$=\Big\{-\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)[g(\xi_{i+1})-g(\xi_i)]$$

$$-f(x_0)[g(\xi_1)-g(x_0)]-f(x_n)[g(x_n)-g(\xi_n)]\Big\}$$

$$+f(x_n)g(x_n)-f(x_0)g(x_0).$$

而上式右端的大括号内恰是对于分划：

$$a=x_0\leqslant\xi_1\leqslant\xi_2\leqslant\cdots\leqslant\xi_n\leqslant x_n=b,$$

并选取 $x_i\in[\xi_i,\xi_{i+1}]$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$，$a\in[a,\xi_1]$及$b\in[\xi_n,b]$的 f 关于 g 的 R-S 和. 当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})\to0$时，$\lambda'=\max[\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\cdot(\xi_{i+1}-\xi_i),\xi_1-a,b-\xi_n]\to0$，故大括号内的和趋于$\int_a^b f(x)dg(x)$. 从而(6.5)式成立. □

推论 6.7 若 f 是$[a,b]$上的有界变差函数，g 在$[a,b]$上是连续的，则 f 在$[a,b]$上关于 g 是 R-S 可积的.

二、L-S 积分大意

抽出 L-测度和 L-积分的最重要的几条性质作为公理，我们可以在这些公理的基础上建立起一般的测度和积分的理论. 由于篇幅所限，我们只能对一些必要的概念及建立 L-S 积分的主要环节作一个简略的介绍.

设$\mathscr{B}$是由集X的子集组成的一个集族. 若 $X\in\mathscr{B}$，对每一个$A\in\mathscr{B}$，$X\setminus A\in\mathscr{B}$，并且任意的可数个$\mathscr{B}$的元素的并仍在$\mathscr{B}$中，则$\mathscr{B}$称为 σ-代数(见第三章定义 2.16).

定义 6.8 设集X的子集组成的集族$\mathscr{B}$是σ-代数，我们称$(X,\mathscr{B})$为可测空间(measurable space)，$\mathscr{B}$中的元素为可测集 (measurable set).

定义 6.9 设$(X,\mathscr{B})$是可测空间，若 μ 是定义在$\mathscr{B}$上的非负集函数(允许取值为$+\infty$)，即

$$\mu:\mathscr{B}\to[0,+\infty],$$

满足$\mu(\varnothing)=0$，且对任意的一列互不相交的可测集$\{E_i\}$有

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu E_i,$$

则 μ 称为可测空间$(X,\mathscr{B})$上的测度. 而$(X,\mathscr{B},\mu)$称为测度空间

(measure space). 若$\mu(X)<+\infty$,则测度μ称为有限的(finite).

若$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}X_n$且$\mu X_n<+\infty(X_n\in\mathscr{B},n\in\mathrm{N})$,则测度$\mu$称为$\sigma$-有限的($\sigma$-finite).

例如$(\mathrm{R},\mathscr{M},m)$是一个测度空间,其中$\mathscr{M}$是R上的Lebesgue可测集的全体,$m$是Lebesgue测度. $([0,1],\mathscr{M},m)$是一个测度空间,其中$\mathscr{M}$是$[0,1]$上的Lebesgue可测子集族,m是Lebesgue测度. $(\mathrm{R},\mathscr{B},m)$也是一个测度空间,其中$\mathscr{B}$是Borel集族,$m$仍是Lebesgue测度.

在测度空间$(X,\mathscr{B},\mu)$中,完全可以仿照第三章定义3.2的方法定义μ可测函数;仿照本章中采用过的方法,先定义简单函数的μ积分,然后再逐步定义μ可测集E上的可测函数f的μ积分

$$\int_E f d\mu.$$

我们要指出,L-可测函数,L-积分的一些重要的性质(包括Lebesgue控制收敛定理等)都可以相应的推广到μ可测函数和μ积分中来.

设$\mathscr{B}$是R上的Borel集族. 若μ是可测空间$(\mathrm{R},\mathscr{B})$上的测度,则μ称为(在数直线上的)Borel测度(Borel measure). 若μ是一个有限Borel测度. 我们可以定义一个R上的函数F,使得

$$F(x)=\mu(-\infty,x],\qquad (x\in\mathrm{R}).$$

F称为μ的累积分布函数(cumulative distribution function). 显然,F是一个实值的单调增加的函数,且

$$\mu(a,b]=F(b)-F(a).$$

由于$(a,b]=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(a,b+\frac{1}{n}\right]$,对于测度$\mu$有一个相当第三章定理

2.9 的定理，故

$$\mu(a,b]=\lim_{n\to\infty}\mu\left(a,b+\frac{1}{n}\right].$$

从而

$$F(b)=\lim_{n\to\infty}F\left(b+\frac{1}{n}\right)=F(b+0).$$

这说明累积分布函数 F 是右连续的，类似地

$$\mu\{b\}=\lim_{n\to\infty}\mu\left(b-\frac{1}{n},b\right]=\lim_{n\to\infty}F(b)-F\left(b-\frac{1}{n}\right)$$
$$=F(b)-F(b-0).$$

因此 F 在 b 处连续，当且仅当单点集 $\{b\}$ 的测度为零. 由于 $\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,-n]=\varnothing$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}F(n)=0.$$

故

$$\lim_{x\to-\infty}F(x)=0.$$

从上面的讨论中，我们得到下面的引理.

引理6.10 若 μ 是R 上的有限 Borel 测度，则它的累积分布函数 F 是单调增加的右连续的有界函数，且 $\lim_{x\to-\infty}F(x)=0$.

累积分布函数在概率论和算子谱论中有重要的应用. 另一方面，有一些实际问题正好与上面的讨论相反. 要问已知一个单调增加且右连续的函数 F，是否存在一个 Borel 测度 μ，使得 F 是 μ 的累积分布函数？我们可以按照下面的思路去寻求 μ. 设 $\mathscr{C}$ 是所有左开右闭区间 $(a,b]$ 的全体. 令 $\mu(a,b]=F(b)-F(a)$，下面我们将定义在 $\mathscr{C}$ 上的集函数 μ 扩张到包含 $\mathscr{C}$ 的 σ-代数上. 而Borel集族 $\mathscr{B}$ 是包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ-代数. 因此 μ 可以扩张为一个 Borel 测度. 我们仍记为 μ. 还可以证明 μ 到 $\mathscr{B}$ 上的扩张是唯一的. 上面

做法的理论根据是从抽象测度理论中得到的. 抽象测度论的直观模型就是 L-测度. 因为 L-测度可以看作区间长度的扩张而得到的. 总结上面的讨论,我们有下面的结论.

定理6.11 设 F 是 $\mathbf{R}$ 上单调增加且右连续的函数, 则存在唯一的 Borel 测度 μ,使得对任何的 a 和 $b(a\leqslant b)$ 有

$$\mu(a,b]=F(b)-F(a).$$

设 μ 是 Borel 测度,F 是它的累积分布函数. 若 f 是非负的 μ 可测函数(或称为 Borel 可测函数), 我们用类似于本章 §1 与 §2 中定义 L-积分的方法来定义 f 在 Borel 集 E 上关于 F 的 L-S 积分,并记为

$$\int_E f dF=\int_E f d\mu.$$

并且下面的结论成立:

设 F 是 $\mathbf{R}$ 上单调增加且右连续的函数, $E\subset\mathbf{R}$ 是有界的 Borel 集. 若 f 是 E 上的有界 Borel 可测函数, 则 f 在 E 上关于 F 的 L-S 积分存在.

对于一般的 μ 可测函数 f, 若 $\int_E f^+ dF$ 和 $\int_E f^- dF$ 皆为有限, 则称 f 在 E 上关于 F 是 L-S 可积的. 这时记它的积分为:

$$\int_E f dF=\int_E f^+ dF-\int_E f^- dF.$$

对于 $\mathbf{R}$ 上单调增加的函数 F, 可以证明存在唯一的单调增加且右连续的函数 F^*, 使得在 F 的连续点 x 处有: $F(x)=F^*(x)$. 我们定义 μ 可测函数 f 在 E 上关于 F 的 L-S 积分为

$$\int_E f dF=\int_E f dF^*.$$

最后,我们指出,可以把 μ 可测函数 f 在 $[a,b]$ 上关于 F 的 L-S 积分的定义推广到关于 $[a,b]$ 上的有界变差函数 F 的情况. 当 F 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数时, F 可以表示为两个非负单调增加的

函数 F_1 与 F_2 之差．当积分

$$\int_E f dF_1 \quad \text{与} \quad \int_E f dF_2$$

皆为有限时，则称 f 在 E 上关于 F 是 L-S 可积的．其积分记为

$$\int_E f dF = \int_E f dF_1 - \int_E f dF_2.$$

§7 L^p空间

定义 7.1 设 p 为一实数（$1 \leq p < \infty$），E 是R中的可测集，若 E 上的可测函数 f 满足

$$\int_E |f(x)|^p dx < +\infty,$$

则称 f 是 E 上 p 幂Lebesgue可积的．简称为 p 幂可积的（p power ntegrable）．E 上所有 p 幂可积函数的全体，记为 $L^p(E)$．特别地，当 $E=[a,b]$时，记为 $L^p[a,b]$．

在本节中，我们要指出 $L^p[a,b]$ 中的元素关于线性运算是封闭的．在 $L^p[a,b]$ 上定义度量，使其成为度量空间．我们将着重讨论 $L^p[a,b]$空间的完备性及可分性，应当说明，虽然我们主要讨论的是闭区间 $[a,b]$ 上的 p 幂可积函数的全体 $L^p[a,b]$．但对任意的可测集 E 来说，本节的有关定义和结论（除特别声明之外）完全可以推广到 $L^p(E)$ 中．

对于 $f \in L^p[a,b]$，令

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们称$\|f\|_p$为 f 的 L^p-范数（L^p-norm）．

当 $p=1$ 时，我们常把 $L^1[a,b]$ 记为 $L[a,b]$．它就是$[a,b]$上的 L-可积函数的全体．

下面我们先建立与第三章§1中相应的Hölder不等式及Minkowski不等式.

引理7.2 设$f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$，这里$p>1$，$q>1$且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则$fg\in L[a,b]$，且

$$\int_a^b |fg|\,dx\leqslant\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{7.1}$$

(Hölder 不等式)

或者

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\cdot\|g\|_q.$$

证明 应用第二章§1引理1.4证明中的young不等式

$$\alpha\beta\leqslant\frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q},\ (\alpha\geqslant 0,\ \beta\geqslant 0).$$

对于$f\in L^p[a,b]$，$g\in L^q[a,b]$及$x\in[a,b]$，令

$$\alpha=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\qquad \beta=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

(这里我们假定$\|f\|_p\neq 0$，$\|g\|_q\neq 0$. 因为当$\|f\|_p=0$或$\|g\|_q=0$时，不等式(7.1)显然成立.)则

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{(\|f\|_p)^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{(\|g\|_q)^q}.$$

由此可见，$fg\in L[a,b]$，且对上式两边求积分，得

$$\frac{\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx}{\|f\|_p\cdot\|g\|_q}\leqslant\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

从而Hölder不等式(7.1)得证. □

引理7.3 设$f,g\in L^p[a,b]\ (p\geqslant 1)$，则$f+g\in L^p[a,b]$，且

$$\left(\int_a^b |f+g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_a^b |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b |g|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{7.2}$$

(Minkowski 不等式)

或者

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

证明 当 $p=1$ 时,容易看出 (7.2)式成立. 现设 $p>1$. 因为对任意的 $x\in[a,b]$.

$$|f(x)+g(x)|^p \leqslant [2\max(|f(x)|,|g(x)|)]^p$$
$$\leqslant 2^p(|f(x)|^p+|g(x)|^p).$$

由 $f,g\in L^p[a,b]$,得 $f+g\in L^p[a,b]$. 又由于

$$(7.3)\qquad \int_a^b |f+g|^p dx \leqslant \int_a^b |f+g|^{p-1}|f|dx + \int_a^b |f+g|^{p-1}|g|dx.$$

应用 Hölder 不等式,

$$\int_a^b |f+g|^{p-1}|f|dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|(|f+g|^{p-1})\|_q,$$

$$\int_a^b |f+g|^{p-1}|g|dx \leqslant \|g\|_p \cdot \|(|f+g|^{p-1})\|_q,$$

把上面两个不等式代入(7.3)式,得

$$(7.4)\qquad \int_a^b |f+g|^p dx \leqslant (\|f\|_p+\|g\|_p)\|(|f+g|^{p-1})\|_q.$$

注意到 $p=(p-1)q$,我们有

$$\|(|f+g|^{p-1})\|_q = \left(\int_a^b (|f+g|^{p-1})^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$=(\|f+g\|_p)^{\frac{p}{q}}.$$

从(7.4)式两端同除以 $\|(|f+g|)^{p-1}\|_q$,得

$$(\|f+g\|_p)^{p-\frac{p}{q}} = \|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p. \qquad \square$$

定理7.4 若 $f,g\in L^p[a,b]$, $\alpha\in\mathbf{R}$,则 $\alpha f, f+g\in L^p[a,b]$.

证明 因为 $f,g\in L^p[a,b]$,有

$$\int_a^b |\alpha f|^p dx = |\alpha|^p \int_a^b |f|^p dx < +\infty.$$

故 $\alpha f\in L^p[a,b]$. 由引理 7.3 知 $f+g\in L^p[a,b]$. $\square$

在$L^p[a,b]$中，对任意的$f,g\in L^p[a,b]$及任意的$\alpha\in\mathbf{R}$，容易验证：

(i) $\|f\|_p\geqslant 0$，$\|f\|_p=0$当且仅当$f=0(a.e.)$.

(ii) $\|\alpha f\|_p=|\alpha|\cdot\|f\|_p$.

(iii) $\|f+g\|_p\leqslant\|f\|_p+\|g\|_p$.

对于$f,g\in L^p[a,b]$，令

$$(7.5)\qquad d(f,g)=\|f-g\|_p=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

由上面的(i)，(ii)，(iii)可得

(i)′ $d(f,g)\geqslant 0$，$d(f,g)=0$当且仅当$f=g(a.e.)$，

(ii)′ $d(f,g)=d(g,f)$，

(iii)′ $d(f,g)\leqslant d(f,h)+d(h,g)\ (h\in L^p[a,b])$.

因此，如果把$L^p[a,b]$中任何两个几乎处处相等的元素看作是相同的元素，那末由(7.5)式定义的d就是$L^p[a,b]$上的度量．从而$L^p[a,b]$成为一个度量空间．

设f是可测集E上的可测函数，若至多除去一个零测度集A之外，f在$E\setminus A$上是有界的，则f称为E上的本性有界可测函数(essential bounded measurable function)．E上所有本性有界可测函数的全体，记为$L^\infty(E)$.

对于$f\in L^\infty(E)$，令

$$\|f\|_\infty=\inf_{\substack{A\subset E\\ mA=0}}\sup_{x\in E\setminus A}|f(x)|,$$

则$\|f\|_\infty<+\infty$．上式右端常称为f的本性上确界(essential supremum)，记为ess sup$|f|$，即$\|f\|=$ess sup$|f|$.

特别地，当$E=[a,b]$时，记$L^\infty(E)$为$L^\infty[a,b]$．在本节中，我们主要讨论$L^\infty[a,b]$．其结论完全可以推广到$L^\infty(E)$中．

容易验证：若$f\in L^\infty[a,b]$，$\alpha\in\mathbf{R}$，则$\alpha f\in L^\infty[a,b]$，并且

$$\|\alpha f\|_\infty=|\alpha|\,\|f\|_\infty.$$

现在我们来证明，Hölder 不等式在 $p=1$ 且 $q=\infty$ 时也成立. 即，若 $f\in L[a,b]$，$g\in L^\infty[a,b]$，则

$$\|fg\|_1\leqslant\|f\|_1\cdot\|g\|_\infty. \tag{7.6}$$

Minkowski 不等式也可以推广到 $p=\infty$ 的情况，即若 $f,g\in L^\infty[a,b]$，则 $f+g\in L^\infty[a,b]$且

$$\|f+g\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty+\|g\|_\infty. \tag{7.7}$$

关于不等式(7.6)与(7.7)的证明可以直接由$\|f\|_\infty$的定义得出.

对于 $f,g\in L^\infty[a,b]$，令

$$d(f,g)=\|f-g\|_\infty. \tag{7.8}$$

如果我们把 $L^\infty[a,b]$中任何两个几乎处处相等的元素看作是相同的元素. 我们可以验证由(7.8)定义的 d 是$L^\infty[a,b]$上的度量，从而 $L^\infty[a,b]$成为一个度量空间.

由积分的性质可知，对任意的 $p\geqslant1$ 皆有 $L^\infty[a,b]\subset L^p[a,b]$.

引理 7.5 若 $1\leqslant p\leqslant q$，则 $L^p[a,b]\supset L^q[a,b]$.

证明 若 $f\in L^q[a,b]$，由 Hölder 不等式

$$\left(\int_a^b|f|^p dx\right)\leqslant\left(\int_a^b(|f|^p)^{\frac{q}{p}}dx\right)^{\frac{p}{q}}\left(\int_a^b 1^{\frac{q}{q-p}}dx\right)^{\frac{q-p}{q}}$$
$$<+\infty.$$

故 $f\in L^p[a,b]$. □

在一般可测集 E 上，当 $mE<+\infty$ 时，若 $1\leqslant p\leqslant q$，也有$L^p(E)\supset L^q(E)$. 但是值得注意的是，当 $mE=+\infty$ 时，上述的包含关系不再成立.

下面，我们讨论(按(7.5)式所定义的度量 d)度量空间 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$的完备性及可分性.

定理7.6 度量空间 $L^p[a,b]$是完备的.

证明 设$\{f_n\}$是 $L^p[a,b]$ 中任一 Cauchy 序列. 故对于每一

个 $k\in\mathbf{N}$，存在 n_k，使得当 $m,n\geqslant n_k$ 时

$$d(f_n,f_m)=\|f_n-f_m\|<2^{-k}. \tag{7.9}$$

我们还可以要求 $n_1<n_2<\cdots$，从而

$$\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|<2^{-k}.$$

由 Hölder 不等式

$$\int_a^b|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|dx\leqslant\|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\|_p\cdot\|1\|_q \tag{7.10}$$

$$\leqslant(b-a)^{\frac{1}{q}}\cdot 2^{-k}.$$

对于每一个 $x\in[a,b]$令

$$F(x)=|f_{n_1}(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)|. \tag{7.11}$$

由定理 3.3 及(7.10)式，我们得到

$$\int_a^b F(x)dx=\int_a^b|f_{n_1}|dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b|f_{n_{k+1}}-f_{n_k}|dx<+\infty.$$

因此 F 在$[a,b]$上几乎处处有限．这样从(7.11)式可知，几乎对所有的 $x\in[a,b]$，级数

$$f_{n_1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[f_{n_{k+1}}(x)-f_{n_k}(x)], \tag{7.12}$$

绝对收敛于 $F(x)$．于是级数(7.12)在$[a,b]$上几乎处处收敛于某一可测函数 f．注意到级数(7.12)的部分和序列正是$\{f_{n_k}\}$，我们得到$\{f_{n_k}\}$在$[a,b]$上几乎处处收敛于 f．

在(7.9)式中，对于固定的 k，当 $j\geqslant k$ 时，有

$$\|f_{n_k}-f_{n_j}\|_p<2^{-k}.$$

应用 Fatou 引理，得到

$$(\|f_{n_k}-f\|_p)^p=\int_a^b|f_{n_k}-f|^p dx$$

$$\leqslant \varliminf_{j\to\infty}\int_a^b |f_{n_k}-f_{n_j}|^p dx$$

$$\leqslant (2^{-k})^p,$$

故$\|f_{n_k}-f\|_p\leqslant 2^{-k}$. 这表明$f_{n_k}-f\in L^p[a,b]$. 从而有$f=f_{n_k}-(f_{n_k}-f)\in L^p[a,b]$. 令$k\to\infty$,得到

$$\|f_{n_k}-f\|_p\to 0.$$

这说明在$L^p[a,b]$空间的度量意义下,Cauchy 序列$\{f_n\}$有一个子序列$\{f_{n_k}\}$收敛于f. 因此$\{f_n\}$收敛于f. □

$L^p[a,b]$ 空间的可分性的证明有很多方法. 下面我们借助于简单函数来进行证明.

引理7.7 设$f\in L^p[a,b]$,对任意的$\varepsilon>0$,存在一个在$[a,b]$上的简单函数φ,使得$\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.

证明 先设$f\in L^p[a,b]$,$f\geqslant 0$. 由第三章的定理 3.11 知,存在一列非负的单调增加的简单函数$\{\varphi_n\}$,使得对每一个$x\in[a,b]$皆有

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=f(x),$$

并且$0\leqslant\varphi_n\leqslant f$,于是得到$\varphi_n\in L^p[a,b](n\in\mathbf{N})$. 又因为$|f-\varphi_n|^p\leqslant f^p$. 由 Lebesgue 控制收敛定理

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\varphi_n\|_p=0.$$

因此,对任意的$\varepsilon>0$,存在$\varphi\in\{\varphi_n\}$,使得$\|f-\varphi\|<\varepsilon$.

在一般的情况下,对于$f\in L^p[a,b]$,我们有$f=f^+-f^-$. 由上面的证明可知结论仍然成立. □

引理7.8 若φ是$[a,b]$上的简单函数. 可设$\varphi=\sum_{i=1}^n c_i\mathbf{1}_{E_i}$. 其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$是常数. $E_1,E_2,\cdots,E_n$是互不相交的可测集. 且

$[a,b]=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\mathbf{R}$ 上的简单函数 $s=\sum_{i=1}^{n}r_i\mathbf{1}_{G_i}$，其中 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 是有理数，$G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是互不相交的开集，且每一个开集 G_i 的构成区间的端点都是有理数，使得 s 在 $[a,b]$ 上的限制 $s_0=s|_{[a,b]}$ 适合 $\|\varphi-s_0\|_p<\varepsilon$.

证明 由于简单函数是有界的，可设 $|\varphi(x)|<M(x\in[a,b])$. 任给 $\varepsilon>0$，对于假设中的互不相交的可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_n$，存在闭集 $F_i\subset E_i$，使得 $m(E_i\setminus F_i)<\dfrac{\varepsilon^p}{2n(2M)^p}(i=1,2,\cdots,n)$. 显然闭集 $F_1,F_2,\cdots,F_n$ 也互不相交. 可以证明(见第二章§4习题 9)存在互不相交的开集 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，使得 $F_i\subset G_i$ 且可使每一个 $G_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的构成区间的端点都是有理数，再对每一个 c_i 取一个有理数 r_i，使得 $|r_i-c_i|<[2(b-a)]^{-\frac{1}{p}}\varepsilon$，且 $|r_i|\leqslant|c_i|$. 令

$$s=\sum_{i=1}^{n}r_i\mathbf{1}_{G_i},$$

记 $s_0=s|_{[a,b]}$，则 s_0 是 $[a,b]$ 上的简单函数，且

$$\begin{aligned}(\|\varphi-s_0\|_p)^p&=\int_a^b|\varphi-s_0|^p dx=\int_{\cup E_i}|\varphi-s_0|^p dx\\&=\int_{\cup F_i}|\varphi-s_0|^p dx+\int_{\cup(E_i\setminus F_i)}|\varphi-s_0|^p dx\\&<\frac{\varepsilon^p}{2(b-a)}(b-a)+(2M)^p\frac{n\varepsilon^p}{2n(2M)^p}\\&=\varepsilon^p.\end{aligned}$$

故 $\|\varphi-s_0\|_p<\varepsilon$. □

我们把引理 7.8 中那些在 $[a,b]$ 上的简单函数 s_0 的全体记为 $\mathscr{S}$，则 $\mathscr{S}$ 是可数集，且 $\mathscr{S}\subset L^p[a,b]$. 应用上面两个引理，我们有下

面的定理.

定理7.9 空间 $L^p[a,b]$是可分的.

证明 对任意的 $f\in L^p[a,b]$及任意的 $\varepsilon>0$. 由引理7.7知,存在$[a,b]$上的简单函数 φ,使得$\|f-\varphi\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$,又由引理 7.8 知, 存在 $s_0\in\mathscr{S}$, 使得$\|\varphi-s_0\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\|f-s_0\|_p\leqslant\|f-\varphi\|_p+\|\varphi-s_0\|_p<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这表明 $\mathscr{S}$在 $L^p[a,b]$ 中稠密,而$\mathscr{S}$是可数的, 故 $L^p[a,b]$是可分的. □

在前面我们所讨论的函数都是实值函数. 为了今后学习的需要, 我们把 Lebesgue 可测函数和 Lebesgue 可积函数的概念推广到复值函数中.

设 f 是定义在可测集 E 上的复值函数,并设 f_1 与 f_2 分别是 f 的实部和虚部,即 $f_1=\frac{1}{2}(f+\bar{f})$, $f_2=\frac{1}{2i}(f-\bar{f})$(这里 $\bar{f}$ 表示 f 的共轭复函数). 于是有

$$f=f_1+if_2.$$

其中 f_1 与 f_2 都是 E 上的实值函数. 若f_1与f_2 都是 E 上的(Lebesgue)可测函数,则称 f 是 E 上的复值(Lebesgue)可测函数.

设 f 是可测集 E 上的复值可测函数. 若 f 的实部 f_1 与虚部 f_2 都是 E 上的(Lebesgue)可积函数,则称 f 为 E 上的复值 (Lebesgue)可积函数,并且

$$\int_E f(x)dx=\int_E f_1(x)dx+i\int_E f_2(x)dx.$$

对于实值可积函数的很多结论,不难推广到复值可积函数中. 下面,我们对 L^p 空间作一推广

设 p 为一个实数，$1\leqslant p<+\infty$，E 是R中的可测集. 我们仍可用 $L^p(E)$ 来表示 E 上满足如下条件的复值可积函数 f 的全体:

$$\int_E |f(x)|^p dx<+\infty.$$

当 $f\in L^p(E)$ 时，令

$$\|f\|_p=\left(\int_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

我们称 $\|f\|_p$ 为 f 的 L^p-范数.

类似地，我们仍用 $L^\infty(E)$ 表示 E 上满足如下条件的复值可测函数 f 的全体:

$$\|f\|_\infty=\inf_{\substack{A\subset E\\ mA=0}}\sup_{x\in E\setminus A}|f(x)|<+\infty.$$

我们指出，关于实值函数空间 L^p 和 L^∞ 在本节中得到的结论，对于复值函数空间 L^p 和 L^∞ 也都是成立的.

习　题

1. 证明本节中的不等式(7.6)及(7.7).

2. 在[0,1]上试作一个可积函数 f，使得 $f\notin L^2[0,1]$

3. 设 $f\in L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$，证明对于任意的 $\varepsilon>0$，存在连续函数 φ，使得 $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.

4. 设 $\{f_n\}\subset L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$，$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f\in L^p[a,b]$. 证明 $\{f_n\}$ 在 $L^p[a,b]$ 中收敛于 f 当且仅当 $\|f_n\|_p\to\|f\|_p$.

5. 设 $\{f_n\}\subset L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$，$\{f_n\}$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处收敛于 $f\in L^p[a,b]$. 若存在常数 M，使得 $\|f_n\|_p\leqslant M$ $(n\in\mathbf{N})$，则对每一个 $g\in L^q[a,b]$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$，有

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx.$$

当 $p=1$，$q=\infty$ 时，上述结论是否仍然成立?

6. 设 $f\in L^\infty[a,b]$，证明必存在 $E\subset[a,b]$，$mE=0$，使得

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]\setminus E} |f(x)|.$$

7. 证明：若 $f\in L^\infty[a,b]$，则对于任意的 $p\geq 1$，都有 $f\in L^p[a,b]$，并且

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty}\|f\|_p.$$

(提示：$\int_a^b |f(x)|^{p+1}dx \leqslant (\|f\|_\infty)^p \int_a^b |f(x)|dx$. 注意：在证明中要用到$m[a,b]<+\infty$的条件．对于一般的可测集$E$，此结论在$f\in L^1(E)\cap L^\infty(E)$的条件下才成立．)

8. 证明：度量空间 $L^\infty[a,b]$是完备的．

9. 证明：度量空间 $L^\infty[a,b]$是不可分的．

第五章 赋范线性空间和Banach空间

在本章中，首先把我们熟悉的有限维线性空间的概念推广到一般的线性空间. 在线性空间中我们对其中的元素赋予范数，从而得到一个赋范线性空间. 这样一种空间中既有线性结构又具有度量. 在度量的意义下完备的赋范线性空间称为 Banach 空间. 在第二章及第四章§7中见过的一些空间，例如 $\mathbf{R}^n, C[a,b], l^p, L^p[a,b](1\leqslant p\leqslant\infty)$ 等都是 Banach 空间. 在本章中，我们将着重研究赋范线性空间及 Banach 空间，以及在其上定义的有界线性算子的性质.

§1 线性空间

在线性代数中，我们已经熟知 n 维线性空间的定义及其有关的性质. 现在，我们给出一般的线性空间的定义.

定义 1.1 设 X 是一非空集合，$\mathbf{K}$ 是数域(实数域或复数域). 若定义 X 中两元素之间的加法运算以及数与 X 中元素之间的数乘运算并且满足下述条件:

加法运算"+"，即这样一个 $X\times X$ 到 X 的映射，使得对每一个 $(x,y)\in X\times X$，对应于 $x+y\in X$，满足下列条件:

(1) $x+y=y+x$,

(2) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

(3) 存在 $\theta\in X$，使得对于一切 $x\in X$，有 $x+\theta=x$(此 θ 称为 X 的零元素),

(4) 对于任意 $x\in X$，存在 x 的加法逆元素 $-x$，使得 $x+(-x)=\theta$;

数乘运算"·"，即这样一个$\mathbf{K}\times X$到X的映射，使得对每一个$(\alpha,x)\in\mathbf{K}\times X$，对应于$\alpha\cdot x\in X$(或记为$\alpha x$)，满足下列条件：

(5) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,

(6) $1x=x$,

(7) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

(8) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,

则X称为数域$\mathbf{K}$上的线性空间(linear space)或向量空间(vector space). 当$\mathbf{K}$是实数域(即$\mathbf{K}=\mathbf{R}$)时，X称为实线性空间. 当$\mathbf{K}$是复数域(即$\mathbf{K}=\mathbf{C}$)时，X称为复线性空间. X上的加法运算和数乘运算统称为线性运算. X中的元素也常称为向量.

由定义不难得到，零元素θ和X中任何元素x的逆元素$-x$都是唯一的，并且

$$0x=\theta,$$

$$\alpha\theta=\theta(\alpha\in\mathbf{K}),$$

$$(-1)x=-x.$$

例 1 $\mathbf{R}^n$是实线性空间，其中加法运算和数乘运算定义为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots,\alpha\xi_n),$$

其中$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n$，$\alpha\in\mathbf{R}$.

例 2 $\mathbf{C}^n$是复线性空间，对任意$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{C}^n$以及$\alpha\in\mathbf{C}$，其加法运算和数乘运算的定义如同上例.

例 3 $C[a,b]$. 对任意$x,y\in C[a,b]$和数$\alpha\in\mathbf{K}$，按通常的线性运算

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),$$

$$(\alpha x)(t)=\alpha x(t)\quad(t\in[a,b]),$$

$C[a,b]$是线性空间.

例 4 $l^p(1\leqslant p\leqslant\infty)$按通常序列相加和数乘运算成为线性空

间. 即任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^p$ 以及 $\alpha\in\mathbf{K}$,

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots),$$
$$\alpha x=(\alpha\xi_1,\alpha\xi_2,\cdots).$$

定义 1.2 设 X 和 Y 是在同一数域 $\mathbf{K}$ 上的两个线性空间，映射 $T:X\to Y$. 若对于任意 $x,y\in X$ 和 $\alpha\in\mathbf{K}$ 有

$$T(x+y)=Tx+Ty,$$
$$T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则 T 称为线性算子(linear operator). 特别地，当 $Y=\mathbf{K}$ 时，T 称为线性泛函.

若有一个映射 $T:X\to Y$，T 是双射且又是线性的，则 X 和 Y 称为同构的线性空间(isomorphic linear spaces).

这里，两个同构的线性空间的"同构"二字意味着可以把它们的(由线性运算决定的)代数结构看作是同一的. 因此在有的书上称此同构为线性同构.

下面，我们再介绍一些常用的术语. 我们总是用 X 表示数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间.

设 $Y\subset X,Y\neq\varnothing$. 若对于任何 $x,y\in Y$ 和 $\alpha\in\mathbf{K}$，有

$$x+y\in Y,\alpha x\in Y,$$

则 Y 称为线性空间 X 的线性子空间(linear subspace) 或简称子空间.

显然，X 是它自己的子空间，仅含零元素的单点集 $\{\theta\}$ 也是 X 的子空间，这两个子空间称为平凡的子空间. 除上述两个平凡的子空间之外的子空间称为 X 的真子空间 (proper subspace). 容易证明，X 的任意多个子空间的交也是 X 的子空间. 但是一般地讲，两个 X 的子空间的并可能不是 X 的子空间.

X 的元素 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 的一个线性组合(linear combination)是指这样一个表示式

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n,$$

其中 $\alpha_i \in \mathbf{K}(i=1,2,\cdots,n)$. 设$M \subset X, M \neq \varnothing$. M中任意有限个元素的线性组合的全体

$$\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \mid x_i \in M, \alpha_i \in \mathbf{K}. i=1,2,\cdots,n, n \in \mathbf{N}\}$$

是X的一个子空间，这个子空间称为由M张成的或生成的 (spanned or generated by M)子空间，记为 span M.

可以证明，span M 是线性空间X中包含M的最小子空间. 换句话说，

$$\operatorname{span} M = \cap \{Y \mid Y \text{ 是 } X \text{ 的子空间且 } Y \supset M\}.$$

在有的书上，将包含M的一切子空间的交称为M的线性包(linear hull). 因此, span M 就是M的线性包.

设$M=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset X$. 若关系式

$$(1.1) \qquad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta,$$

其中 $\alpha_i \in \mathbf{K}(i=1,2,\cdots,n)$, 仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ 时才成立，则 M 称为是线性无关的 (linearly independent). 若M不是线性无关的，则M称为是线性相关的(linearly dependent). 当M线性相关时，必存在一组不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使得关系式(1,1)成立. 或者说,其中必有一个元素可以表示为其它元素的线性组合.

设M是X的子集. 若M的每一个有限子集是线性无关的，则M称为是线性无关的. 若M不是线性无关的,则M称为是线性相关的.

定义 1.3 线性空间X称为是有限维的(finite dimensional), 若存在一个正整数 n, 使得

(1) X 包含一个由 n 个元素组成的线性无关集;

(2) 任何多于或等于 $n+1$ 个元素组成的集都是线性相关的.

这时, 正整数 n 称为X的维数(dimension), 记为 $\dim X = n$. 当$X = \{\theta\}$时, 记 $\dim X = 0$. 若X不是有限维的, 则X称为是无限维的

(infinite dimensional).

例如 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 都是 n 维的线性空间. 而 $C[a,b]$和 $l^p(p\geqslant 1)$ 都是无限维的线性空间. 在泛函分析中，我们着重讨论无限维的线性空间.

若 $\dim X=n$,则 X 中由 n 个元素组成的线性无关集称为 X 的一个基(basis). 若$\{e_1,\cdots,e_n\}$是 X 的一个基,则每一个 $x\in X$ 可唯一地表示为基元的线性组合,即存在唯一的 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$, 使得

$$x=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n.$$

我们熟知,在 $\mathbf{R}^n$ 中有一个基:

$$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$$

$$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$$

$$\cdots\cdots$$

$$e_n=(0,0,0,\cdots,1).$$

一般地，设 X 是任意的线性空间(不一定是有限维的). 若 X 的子集 B 是线性无关的,且 $\operatorname{span} B=X$,则 B 称为 X 的一个基或称为 Hamel 基(Hamel basis).

对于 Hamel 基的进一步研究，需要用到 Zorn 引理 (见第一章 §5). 在这里我们不去详细讨论它，仅指出两个重要的结论:

(i) 每一个线性空间 X $(X\neq\{\theta\})$都有一个基.

(ii) 线性空间 X $(X\neq\{\theta\})$ 的所有的基都有相同的基数. 因此，我们称这个基数为 X 的维数. 显然，这一定义包含了有限维线性空间的维数的定义.

最后,我们给出一个简单的结论.

定理 1.4 设 X 是 n 维线性空间，则 X 的任何真子空间 Y 的维数都小于 n.

证明 设 $\dim X=0$, 即 $X=\{\theta\}$,则 X 中没有真子空间. 现设 $\dim X=n\geqslant 1$, Y 是 X 的真子空间. 于是 $Y\neq\{\theta\}$. 显然，$\dim Y$

$\leqslant \dim X$. 另一方面，若 $\dim Y = \dim X = n$，则 Y 中有一个由 n 个元素组成的基. 它同时也是 X 的基. 因此 $X = Y$. 矛盾. 所以 $\dim Y \neq \dim X$. 归纳上述证明得到 $\dim Y < \dim X = n$. □

习　题

1. 设 $M = \{(1,1,1), (0,0,2)\}$，试说明 span M 的几何意义.

2. 证明线性空间 X 的任意多个子空间的交仍然是 X 的子空间. 但是 X 的两个子空间的并不一定是 X 的子空间，试举例说明.

3. 设 M 是线性空间 X 的子集，证明 span M 是包含 M 的最小子空间.

4. 设 Y 是线性空间 X 的子空间. 对每一个 $x \in X$，令

$$X + Y = \{x + y |_{y \in Y}\}$$

它称为 x 的傍集(coset). 定义下列线性运算

$$(x_1 + Y) + (x_2 + Y) = (x_1 + x_2) + Y,$$

$$\alpha(x + y) = \alpha x + Y.$$

证明所有傍集的全体按上述线性运算成为一个线性空间. 我们称此空间为商空间(quotient space)，记为 X/Y.

5. 设 X 是线性空间，f 是 X 上的非零线性泛函，记

$$\mathscr{N}(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$$

$\mathscr{N}(f)$ 称为 f 的零空间. 试证明若取定一点 $x_0 \in X$，$f(x_0) \neq 0$，则每一个 $x \in X$ 都有唯一的分解式

$$x = \alpha x_0 + y \quad (\text{其中 } y \in \mathscr{N}(f), \alpha \in \mathbf{K}).$$

6. 设 T 是线性空间 X 到线性空间 Y 的线性算子. 证明

(1) T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 是 Y 的线性子空间.

(2) 若 $\dim X = n$，则 $\dim \mathscr{R}(T) \leqslant n$.

§2　赋范空间和 Banach 空间

我们知道，在 $\mathbf{R}^2$ 空间(或类似地考虑 $\mathbf{R}^n$ 空间)中的每一个点 $x = (\xi_1, \xi_2)$ 对应于一个以原点为起点、以 (ξ_1, ξ_2) 为终点的向量. 因此 $\mathbf{R}^2$ 中的点 x 也可看作为向量 x. 向量 x 的长度记为 $\|x\|$

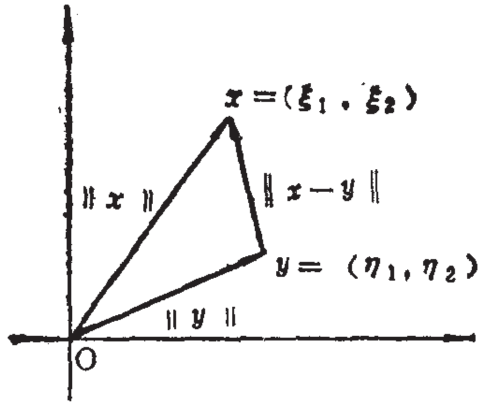


图 2.1

$=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$. 有了向量长度的概念,$\mathbf{R}^2$ 中任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2)$ 与 $y=(\eta_1,\eta_2)$ 的距离 $d(x,y)$ 就可规定为二向量 x 与 y 的差的长度. 即

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2}$$

(见图 2.1). 因此,从向量的长度的概念出发可以得到 $\mathbf{R}^2$ 中的度量 d. 在本节中,我们把 $\mathbf{R}^2$ 中向量的长度的概念抽象到一般的线性空间中,给出下面的定义.

定义 2.1 设 X 是数域 $\mathbf{K}$ 上的线性空间. 在 X 上定义实值泛函 $\varphi:X\to[0,+\infty)$,对每一个 $x\in X$ 其对应的值 $\varphi(x)$ 记为 $\|x\|$. 若满足下列范数公理:

对任意 $x,y\in X,\alpha\in\mathbf{K}$,

$(N1)$ $\|x\|>0$ 且 $\|x\|=0$ 当且仅当 $x=\theta$;

$(N2)$ $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$;

$(N3)$ $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (三角不等式),

则 $\|x\|$ 称为 x 的范数(norm). $(X,\|\cdot\|)$ 称为赋范线性空间(normed linear space) 或简称为赋范空间 (normed space). 在范数不致于混淆的情况下,赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 可简记为 X.

在赋范空间 $(X,\|\cdot\|)$ 中,对于任意的 $x,y\in X$,定义

$$d(x,y)=\|x-y\|. \tag{2.1}$$

容易验证 d 是 X 上的度量. d称为由范数导出的度量. 这样,赋范空间在这样一个自然的方式导出的度量下成为一个度量空间. 易见,赋范空间 X 中以 x 为中心、r 为半径的开球为

$$B(x,r)=\{y \mid \|x-y\|<r\}.$$

在赋范空间中, 可以用范数描述序列的收敛性和 Cauchy 序列的概念.

设 $\{x_n\}$ 是 $(X,\|\cdot\|)$ 中的序列.

(i) 若存在 $x\in X$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$, 则称 $\{x_n\}$ 依范数收敛于 x.

(ii) 若对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使得对一切 m, $n>N$ 都有 $\|x_m-x_n\|<\varepsilon$,则称 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列.

前面我们已经指出, 范数是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量的长度概念的抽象. 因此,定义 2.1 中的范数公理($N1$),($N2$), ($N3$)的几何意义

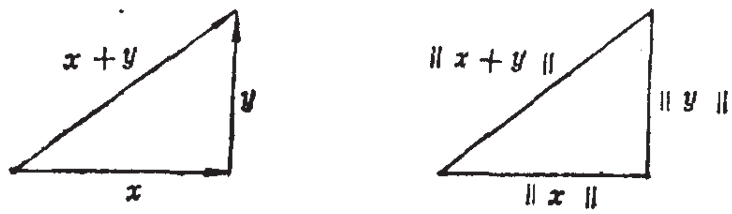


图 2.2

是明显的. 特别值得提到, 在 $\mathbf{R}^2$ 中($N3$)的几何意义就是三角形两边之和大于第三边这一原理(图 2.2). 因此($N3$)常称为三角不等式.

由几何上的启发: 三角形中两边之差必小于第三边. 在赋范空间中,我们可以得到对应的范数不等式(图 2.3):

$$(2.2)\qquad \big|\|y\|-\|x\|\big|\leqslant\|y-x\|.$$

事实上,由三角不等式($N3$),$\|y\|\leqslant\|y-x\|+\|x\|$,从而

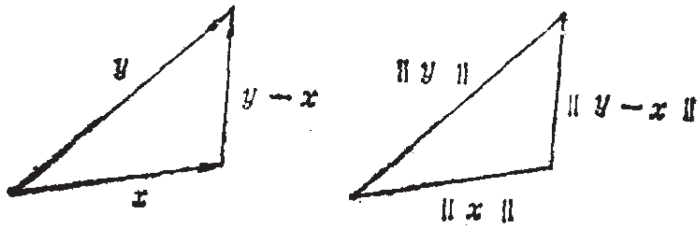


图 2.3

(2.3) $$\|y\|-\|x\|\leqslant\|y-x\|.$$

另一方面，再应用三角不等式($N3$)，$\|x\|\leqslant\|x-y\|+\|y\|$，从而

(2.4) $$\|x\|-\|y\|\leqslant\|y-x\|.$$

因此，由(2.3)和(2.4)便得到(2.2).

不等式(2.2)可推出下面范数的一个重要性质.

引理 2.2 范数是连续的，即$x\mapsto\|x\|$是$(X,\|\cdot\|)$到$\mathbf{R}$的连续映射.

证明 取任意$x\in X$和X中任意的序列$\{x_n\}$，使$x_n\to x$. 由不等式(2.2)得

$$|\|x_n\|-\|x\||\leqslant\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty)$$

因此$\|x_n\|\to\|x\|$. □

定义 2.3 若赋范空间X在范数导出的度量下是完备的度量空间，则X称为 Banach 空间(Banach space). 简言之，Banach 空间是完备的赋范空间.

由第二章定义 5.3 知，赋范空间X成为 Banach 空间，当且仅当X中每一个 Cauchy 序列都收敛于X中某一点. 从第二章§5的例 8，我们可以得到一些空间的完备性的结论.

例 1 $\mathbf{R}^n$(或$\mathbf{C}^n$). 通常定义如下的范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$(x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)),则 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)是 Banach 空间.

例 2 $l^p(1\leqslant p<\infty)$. 通常定义如下的范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$(x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p)$,则 $l^p(1\leqslant p<\infty)$是 Banach 空间.

例 3 $L^p[a,b]$ $(1\leqslant p<\infty)$. 按照逐点的方式定义函数的线性运算

$$(x+y)(t)=x(t)+y(t),(\alpha x)(t)=\alpha x(t),$$

则 $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$ 成为线性空间. 在此空间中我们总是把两个几乎处处相等的函数看作为同一元素,并且按照第四章 §7定义此空间中元素 x 的范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

则 $L^p[a,b]$是 Banach 空间(见第四章定理 7.6).

例 4 l^∞. 通常定义如下的范数

$$\|x\|=\sup_{i\in N}|\xi_i|$$

$(x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty)$,则 l^∞ 是 Banach 空间.

例 5 $C[a,b]$. 通常定义如下的范数

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|$$

$(x\in C[a,b])$,则 $C[a,b]$是 Banach 空间.

例 6 在 $C[a,b]$中定义范数为

$$\|x\|_1=\int_a^b|x(t)|dt$$

$(x\in C[a,b])$,由第二章 §5 例 6 知,$(C[a,b],\|\cdot\|_1)$ 是不完备的赋范空间.

今后,当我们说空间 $\mathbf{R}^n(\mathbf{C}^n)$, $l^p(1\leqslant p<\infty)$, $L^p[a,b](1\leqslant p<\infty)$, l^∞, $C[a,b]$时, 这些空间中的范数将总是指分别在例 1 至

例 5 中定义的范数. 而在例 6 中给出的赋范空间必须清楚地写为 $(C[a,b],\|\cdot\|_1)$.

前面,我们已经知道,赋范空间的范数可以导出度量. 但是每一个线性空间中的度量并不一定都是由此线性空间上的某一范数导出的. 在举出反例之前,先证明一个引理,它表明由范数导出的度量应具有的性质.

引理 2.4 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间, d 是由范数导出的度量,则对于任意的 $a,x,y\in X$ 和任意的数 α,有

(1) $d(x+a,y+a)=d(x,y)$,

(2) $d(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|d(x,y)$.

证明 由于 $d(x,y)=\|x-y\|$, 则

$d(x+a,y+a)=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x-y\|=d(x,y)$,

$d(\alpha x,\alpha y)=\|\alpha x-\alpha y\|=|\alpha|\cdot\|x-y\|=|\alpha|d(x,y)$. □

例 7 s 空间(见第二章 §1 例 6), 按照通常序列相加和数乘的运算,是线性空间. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in s$, s 上的度量 d 定义为

$$d(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},$$

则 d 不能由 s 上的某一范数导出, 因为 d 不满足引理 2.4 中的必要条件(2).

设 X 是赋范空间. 若 Y 是 X 作为线性空间的子空间, 并且 Y 的范数是 X 的范数在 Y 上的限制 (这时 Y 的范数称为是由 X 的范数导出的范数),则 Y 称为赋范空间 X 的子空间 (subspace). 若子空间 Y 在 X 中是闭的,则 Y 称为 X 的闭子空间(closed subspace). Banach 空间 X 的子空间是指 X 作为赋范空间的子空间, 因此 Banach 空间的子空间不必是完备的. 由相应的完备度量空间的

子空间的定理(第二章定理 5.4)可得到下面的定理.

定理 2.5 设 Y 是 Banach 空间 X 的子空间，则 Y 是完备的，当且仅当 Y 是 X 中的闭集.

由于线性空间具有加法运算，因此类似于微积分中的无穷级数，我们可以作如下的定义.

设 $\{x_i\}$ 是赋范空间 X 中的序列. 作部分和序列 $\{s_n\}$:

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

若 $\{s_n\}$ 是收敛的，即存在 $s \in X$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = s$，则级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x_1 + x_2 + \cdots$$

称为是收敛的(convergent)，s 称为这个级数的和(sum)，记为

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} x_i.$$

若 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|x_i\|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i$ 称为是绝对收敛的(absolutely convergent). 值得注意的是，在赋范空间 X 中，每一个绝对收敛的级数都是收敛的，当且仅当 X 是完备的(见习题 4).

若 $\{e_n\}$ 是赋范空间 X 中的序列，具有如下性质：对每一个 $x \in X$ 有唯一的数列 $\{\alpha_n\}$，使得

$$\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{2.5}$$

则 $\{e_n\}$ 称为 X 的 Schauder 基 (Schauder basis). 从(2.5)式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$ 的和为 x，此级数称为 x 的展开式(expansion)，记为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

例 8 $l^p(1\leqslant p<\infty)$中有一个 Schauder 基$\{e_n\}$:

$$e_1=(1,0,0,0,\cdots)$$
$$e_2=(0,1,0,0,\cdots)$$
$$e_3=(0,0,1,0,\cdots)$$
$$\cdots\cdots$$

不难证明，具有 Schauder 基的赋范空间是可分的．但是逆命题是否成立的问题很长时间没有解决，直到 1973 年才得到否定的解答．P. Euflo 构造了一个可分的 Banach 空间，其中没有 Schauder 基．

习　题

1. 在$\mathbb{R}^n$中，对于$x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$，定义

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^n|\xi_i|,$$
$$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|.$$

验证$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|_\infty$都是$\mathbb{R}^n$中的范数．

2. 在l^∞中，令$C_{00}=\{x\in l^\infty\mid x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$，$\xi_i$中仅有有限个不为零$\}$．证明$C_{00}$是$l^\infty$的不完备的子空间．

3. 设Y是赋范空间X的子空间．证明$\bar{Y}$也是X的子空间．

4. 证明在赋范空间X中，每一个绝对收敛的级数都是收敛的，当且仅当X是完备的．

5. 若赋范空间X有一个 Schauder 基，则X是可分的．

6. 设Y是赋范空间$(X,\|\cdot\|)$的闭子空间，对于商空间X/Y(见§1 习题 4)的元素$\hat{x}$，定义

$$\|\hat{x}\|_0=\inf_{x\in\hat{x}}\|x\|$$

验证$\|\cdot\|_0$是X/Y中的范数．

§3 有限维的赋范空间

我们知道，n 维线性空间与 $\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）是同构的线性空间，即它们的代数结构是相同的．在本节中，我们将进一步看到，n 维赋范空间与 $\mathbf{R}^n$（或 $\mathbf{C}^n$）具有更多相似的性质．

本节的讨论从下面一个基本的引理出发，应用这个引理可得到一系列结论．

引理 3.1 设 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 是赋范空间 X 中的线性无关集，则存在一个数 $c>0$，使得对每一数组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都有

$$\|\alpha_1 x_1+\cdots+\alpha_n x_n\| \geqslant c(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|). \tag{3.1}$$

证明 令 $s=|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|$．若 $s=0$，则(3.1)成立．现设 $s>0$．令 $\beta_i=\dfrac{\alpha_i}{s}(i=1, \cdots, n)$，则(3.1)等价于

$$\|\beta_1 x_1+\cdots+\beta_n x_n\| \geqslant c \quad \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|=1\right). \tag{3.2}$$

现在只要证明，存在 $c>0$，使得对每一数组 $\beta_1, \cdots, \beta_n$，$\sum\limits_{i=1}^{n}|\beta_i|=1$，都有(3.2)成立．假若此结论不成立，则存在一个序列 $\{y_m\}$，

$$y_m=\beta_1^{(m)} x_1+\cdots+\beta_n^{(m)} x_n \quad \left(\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}|=1\right)$$

满足 $\|y_m\| \to 0(m \to \infty)$．由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\beta_i^{(m)}|=1$，则 $|\beta_i^{(m)}| \leqslant 1(i=1, \cdots, n)$．因此，对每一个固定的 i，序列

$$\{\beta_i^{(m)}\}=\{\beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \beta_i^{(3)}, \cdots\}$$

是有界的．由 Bolzano-Weierstrass 定理，$\{\beta_1^{(m)}\}$ 有收敛的子序

列 $\beta_1^{(1,m)} \to \beta_1 (m\to\infty)$. 令

(3.3) $$y_{1,m}=\beta_1^{(1,m)}x_1+\beta_2^{(1,m)}x_2+\cdots+\beta_n^{(1,m)}x_n,$$

则$\{y_{1,m}\}$是$\{y_m\}$的子序列. 同样地, 在(3.3)中序列$\{\beta_2^{(1,m)}\}$是有界的, 从而有收敛的子序列: $\beta_2^{(2,m)}\to\beta_2(m\to\infty)$. 令

$$y_{2,m}=\beta_1^{(2,m)}x_1+\beta_2^{(2,m)}x_2+\cdots+\beta_n^{(2,m)}x_n,$$

则$\{y_{2,m}\}$是$\{y_{1,m}\}$的子序列, 从而是$\{y_m\}$的子序列. 由于$\{\beta_1^{(2,m)}\}$是$\{\beta_1^{(1,m)}\}$的子序列, 因此仍然有$\beta_1^{(2,m)}\to\beta_1(m\to\infty)$. 按这样的方法继续到第$n$步, 我们得到$\{y_m\}$的子序列$\{y_{n,m}\}=\{y_{n,1},y_{n,2},\cdots\}$, 其中

(3.4) $$y_{n,m}=\beta_1^{(n,m)}x_1+\beta_2^{(n,m)}x_2+\cdots+\beta_n^{(n,m)}x_n$$

满足: (a)对每一个固定的i $(i=1,\cdots,n)$有$\beta_i^{(n,m)}\to\beta_i$ $(m\to\infty)$, 从而$y_{n,m}\to y=\beta_1x_1+\cdots+\beta_nx_n(m\to\infty)$;

(b) $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i^{(n,m)}|=1$, 从而由 (a) 得到 $\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|=1$. 由于$\{x_1,\cdots,x_n\}$是线性无关集以及$\beta_1,\cdots,\beta_n$不全为零, 则$y\neq\theta$.

另一方面, 由于$y_{n,m}\to y$和范数的连续性(引理2.2), 我们得到$\|y_{n,m}\|\to\|y\|$. 由于$\|y_m\|\to 0$, 从而$\|y_{n,m}\|\to 0$, 则$\|y\|=0$, 于是$y=\theta$. 得到矛盾. □

应用这个引理, 可以证明下面几个重要的结论, 即定理 3.2, 定理 3.5和定理 3.6.

定理 3.2 赋范空间X的每一个有限维的子空间Y是完备的. 特别地, 每一个有限维的赋范空间是完备的.

证明 对于Y中任意的Cauchy序列$\{y_m\}$, 我们要证它在Y中收敛. 设 $\dim Y=n$, 并设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是Y的基, 则y_m有唯一的表示式

$$y_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n(m=1,2,\cdots).$$

由于$\{y_m\}$是 Cauchy 序列, 则对于任意$\varepsilon>0$, 存在正整数N, 使得

对一切 k，$m>N$ 有 $\|y_k-y_m\|<\varepsilon$. 由此及引理 3.1，存在正数 c，使得

$$\varepsilon>\|y_k-y_m\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(m)})e_i\right\|$$

$$\geqslant c\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(m)}|.$$

对每一个固定的 $i(i=1,\cdots,n)$.

$$|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(m)}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(k)}-\alpha_i^{(m)}|<\frac{\varepsilon}{c}.$$

因此，$\{\alpha_i^{(m)}\}$ 是 $\mathbf{R}$(或 $\mathbf{C}$) 中的 Cauchy 序列. 可设 $\alpha_i^{(m)}\to\alpha_i(m\to\infty)$. 令

$$y=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n,$$

则 $y\in Y$，并且当 $m\to\infty$ 时

$$\|y_m-y\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(m)}-\alpha_i)e_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)}-\alpha_i|\cdot\|e_i\|\to0.$$

所以 $y_m\to y\in Y$. □

由此定理及第二章定理 5.4，得到下面的推论.

推论 3.3 赋范空间的每一个有限维子空间都是闭的.

注意，赋范空间的无限维子空间不一定是闭的. 例如，在 Banach 空间 $C[0,1]$中，取 $x_n\in C[0,1]$，其定义为 $x_n(t)=t^n(n=0,1,2,\cdots)$. 令 $Y=\text{span}\{x_0,x_1,x_2,\cdots\}$，则 Y 是$[0,1]$上所有多项式的全体，Y 是$C[0,1]$的一个无限维子空间. 考察 $e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$，其部分和序列含于$Y$中，但部分和序列的极限不属于 Y. 因此Y在$C[0,1]$中不是闭的.

有限维赋范空间 X 还有一个重要的性质. 即 X 上由不同的范

数导出的拓扑都是相同的. 为此，我们在一般的赋范空间中引入等价范数的概念.

定义 3.4 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间X上的两个范数. 若存在正数 a 和 b,使得对于每一个 $x\in X$ 都有

$$
a\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|_2, \tag{3.5}
$$

则范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$称为是等价的(equivalent).

容易看出：若$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$是等价的，则$\|\cdot\|_2$与$\|\cdot\|_1$也是等价的.

等价范数有一个基本的性质：若线性空间X上的范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的，则$(X,\|\cdot\|_1)$ 中的所有开集组成的集族等于 $(X,\|\cdot\|_2)$中的所有的开集组成的集族. 换句话说，范数$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$在X上导出的拓扑是相同的. 事实上，设G是$(X,\|\cdot\|_1)$ 中的开集，$x\in G$,则存在 $r>0$，使得开球 $B_1(x,r)=\{y\in X\mid \|x-y\|_1<r\}\subset G$. 由(3.5),有$(X,\|\cdot\|_2)$中的开球$B_2\left(x,\dfrac{r}{b}\right)$,使得

$$
B_2\left(x,\frac{r}{b}\right)=\left\{y\in X\mid \|x-y\|_2<\frac{r}{b}\right\}\subset B_1(x,r)\subset G.
$$

因此G是$(X,\|\cdot\|_2)$中的开集. 同样可证$(X,\|\cdot\|_2)$ 中任一开集也是$(X,\|\cdot\|_1)$中的开集.

我们还容易看到：若线性空间X上的范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是等价的,则$(X,\|\cdot\|_1)$和$(X,\|\cdot\|_2)$中的 Cauchy 序列是相同的，序列的敛散性是一致的(见习题 1).

应用引理 3.1，我们证明下列仅在有限维空间中成立的定理.

定理 3.5 在有限维线性空间中，任何两个范数$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$都是等价的.

证明 设 $\dim X=n$, X 的一个基为$\{e_1,\cdots,e_n\}$. 每一个 $x\in X$

可唯一地表示为

$$x=\alpha_1 e_1+\cdots+\alpha_n e_n.$$

由引理 3.1,存在正数 c,使得

$$\|x\|_1\geqslant c(|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|).$$

另一方面,由三角不等式

$$\|x\|_2=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\right\|_2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|\,\|e_i\|_2\leqslant k\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|,$$

其中 $k=\max(\|e_1\|_2,\cdots,\|e_n\|_2)$. 上面两个不等式合起来,便得到

$$a\|x\|_2\leqslant\|x\|_1,$$

这里 $a=\dfrac{c}{k}>0$. 在上面的证明中,将 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 互换,则可同样证明(3.5)的另一个不等式成立. □

下面,我们讨论有限维赋范空间中的紧子集与有界闭集之间的关系,并且把集合的紧性与有界闭性的等价作为有限维赋范空间的特性. 回顾第二章定理 8.2(2):度量空间中的紧集是有界闭集,第二章 §8 习题 2 又指出:在无限维度量空间中存在不是紧集的有界闭集. 这就是说,在无限维度量空间中紧集与有界闭集不是等价的. 可是,在有限维的赋范空间中紧集与有界闭集是等价的.

定理 3.6 设 M 是有限维赋范空间 X 的子集,则 M 是紧集的充分必要条件是 M 是有界闭集.

(由此可知,有限维赋范空间中的有界集一定是列紧集.)

证明 由第二章定理 8.2(2),定理的必要性成立. 现证明充分性. 设 M 是有界闭集. 并设 $\dim X=n$ 且 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基. 对于 M 中任意序列 $\{x_m\}$,每一个 x_m 有唯一的表示式

$$x_m=\alpha_1^{(m)}e_1+\cdots+\alpha_n^{(m)}e_n.$$

由于 M 有界，从而 $\{x_m\}$ 有界，可设 $\|x_m\|\leqslant k(m=1,2,\cdots)$. 应用引理 3.1，存在正数 c，使得

$$k\geqslant\|x_m\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(m)}e_i\right\|\geqslant c\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(m)}|.$$

因此，对每一个固定的 $i(i=1,2,\cdots,n)$，数列 $\{\alpha_i^{(m)}\}$ 是有界的. 用引理3.1的证明中的方法，每一数列 $\{\alpha_i^{(m)}\}$ 有一个子序列收敛于 α_i，并且可作出一个 $\{x_m\}$ 的子序列 $\{x_{n,m}\}$，它收敛于 $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$. 因 M 是闭的，故 $x\in M$. 因此，由第二章推论 8.11，M 是紧集. 充分性得证.

设 A 是有限维赋范空间 X 中的有界集，可设有 $r>0$ 使得 A 含于闭球 $\widetilde{B}(\theta,r)$，故 $\bar{A}\subset\widetilde{B}(\theta,r)$. 由刚才证明的结论，则 $\bar{A}$ 是紧集，从而 A 是列紧集. □

为了得到定理 3.8，我们需要 F·Riesz 的一个引理. 此引理在理论上也是很重要的. 我们知道，若考虑 $\mathbf{R}^n$ 空间的任一真子空间 Y，则必有一单位向量 x，使 x 与 y 的距离 $d(x,Y)=\inf\limits_{y\in Y}\|x-y\|=1$. F·Riesz 把这一性质推广到一般的(可以是无限维的)赋范空间.

引理 3.7 (Riesz 引理) 设 Y 是赋范空间 X 的子空间. 若 Y 是 X 的闭的真子空间，则对于任意的 β: $0<\beta<1$，存在 $x_0\in X$，使得 $\|x_0\|=1$ 且对所有的 $y\in Y$ 都有

$$\|x_0-y\|\geqslant\beta.$$

证明 任取 $v\in X\backslash Y$. 记 a 为 v 与 Y 的距离，即

$$a=d(v,Y)=\inf_{y\in Y}\|v-y\|.$$

由于 Y 是闭集，则 $a>0$(第二章定理 2.11(5)). 任取 β: $0<\beta<1$，由下确界的定义，存在 $y_0\in Y$，使得

$$a \leqslant \|v - y_0\| \leqslant \frac{a}{\beta}.$$

令 $x_0 = c(v - y_0)$，这里$c = \frac{1}{\|v - y_0\|}$，则$\|x_0\| = 1$ 且对每一个 $y \in Y$ 有 $\|x_0 - y\| \geqslant \beta$ 事实上

$$\begin{aligned}\|x_0 - y\| &= \|c(v - y_0) - y\| = c\|v - y_0 - c^{-1}y\| \\ &= c\|v - y_1\|,\end{aligned}$$

这里 $y_1 = y_0 - c^{-1}y \in Y$，因而$\|v - y_1\| \geqslant a$. 所以

$$\|x_0 - y\| = c\|v - y_1\| \geqslant ca = \frac{a}{\|v - y_0\|} \geqslant \frac{a}{a/\beta} = \beta. \qquad \square$$

定理 3.8 设X是赋范空间，则X是有限维的当且仅当X的单位闭球 $M = \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$是紧的.

证明 由定理3.6，必要性成立. 现证充分性. 设闭单位球 M 是紧集，假若 $\dim X = \infty$. 任取 $x_1 \in X$，$\|x_1\| = 1$，记 X_1 为由 x_1 生成的X的一维子空间，则 X_1 是 X 的真子空间. 由 Riesz 引理，若取 $\beta = \frac{1}{2}$，则存在 $x_2 \in X$ 使得$\|x_2\| = 1$ 且

$$\|x_2 - x_1\| \geqslant \beta = \frac{1}{2}.$$

记 X_2 为由 x_1, x_2 生成的X的二维子空间，则X_2是X的真子空间. 再用 Riesz 引理，存在 $x_3 \in X$，使得$\|x_3\| = 1$ 且

$$\|x_3 - x_1\| \geqslant \beta = \frac{1}{2}, \ \|x_3 - x_2\| \geqslant \beta = \frac{1}{2}.$$

如此继续下去，我们可以得到一个M中的序列$\{x_n\}$，满足

$$\|x_m - x_n\| \geqslant \frac{1}{2} \quad (m \neq n).$$

显然$\{x_n\}$没有收敛的子序列，此与M的紧性矛盾. 因此X必为有限维的. $\square$

此定理表明，在无限维的赋范空间中，闭单位球不是紧集.

由定理 3.6 与定理 3.8 可以得到如下推论.

推论 3.9 赋范空间X是有限维的，当且仅当X的每一个有界集都是列紧的.

习　题

1. 设$\|\cdot\|_1$和$\|\cdot\|_2$是线性空间X上的两个等价范数,$\{x_n\}$是X中的序列. 证明:

(i) $\{x_n\}$是$(X,\|\cdot\|_1)$中的 Cauchy 序列,当且仅当$\{x_n\}$是$(X,\|\cdot\|_2)$中的 Cauchy 序列.

(ii) $\{x_n\}$在范数$\|\cdot\|_1$下收敛于x_0，当且仅当$\{x_n\}$在范数$\|\cdot\|_2$下收敛于x_0.

2. 在l^∞中,令$Y=\{x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\mid$对每一个$i\in\mathbf{N},|\xi_i|\leqslant 1\}$,则$Y$不是紧集.

3. 若Y是赋范空间X中的有限维真子空间,则存在$x_0\in X$，使得$\|x_0\|=1$且$\inf\limits_{y\in Y}\|x_0-y\|=1$.

4. 证明无限维的 Banach 空间不能分解为可数个列紧集之并.

5. 设X是无限维的 Banach 空间 证明X中任何可数个向量$\{e_n\}$都不能构成X的 Hamel 基.

§4　有界线性算子

泛函分析中一类重要的问题是研究赋范空间X与Y之间的映射或称为算子. 设算子$T:X\to Y$. 当$Y=$数域$\mathbb{K}$时,T称为X上的泛函. 回顾定义 1.2,若$T:X\to Y$(X与Y定义在同一数域$\mathbb{K}$上)保持线性运算,即对任意的$x,y\in X$和$\alpha\in\mathbb{K}$有

$$T(x+y)=Tx+Ty,T(\alpha x)=\alpha Tx,$$

则T称为线性算子. 令

$$\mathscr{N}(T)=\{x\in X\mid Tx=\theta\}.$$

$\mathscr{N}(T)$称为算子T的零空间(null space)或称为算子T的核 (ker-

nel). 显然,$\mathscr{N}(T)$是X的线性子空间.

对于线性算子$T:X\to Y$,容易看出$T\theta=\theta$,这里用θ同时表示X与Y的零元.

定义 4.1 设T是赋范空间X到赋范空间Y的线性算子. 若存在常数c,使得对所有的$x\in X$都有

$$\|Tx\|\leqslant c\|x\|, \tag{4.1}$$

则T称为X上的有界线性算子(bounded linear operator).

在(4.1)中,虽然范数采用同样的记号$\|\cdot\|$,但是我们清楚,$\|x\|$是x在X中的范数,而$\|Tx\|$是Tx在Y中的范数. 定义中我们用"有界"二字是由于下面一个明显的事实:

$T:X\to Y$是有界线性算子,当且仅当T把X中的任一有界集映成Y中的有界集.

此结论的必要性是明显的,现证充分性. 由假设X中的单位闭球$\widetilde{B}(\theta,1)$的像$T(\widetilde{B}(\theta,1))$在$Y$中有界,即存在$c>0$,使得对任意的$y\in\widetilde{B}(\theta,1)$有$\|Ty\|\leqslant c$. 现任取$x\in X$,$x\neq\theta$,则$\frac{x}{\|x\|}\in\widetilde{B}(\theta,1)$,于是

$$\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|=\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c,$$

即$\|Tx\|\leqslant c\|x\|$. 并且显然此不等式当$x=\theta$时仍成立.

值得注意,这里算子"有界"的含义与微积分中有界函数的定义是不同的,在那里,有界函数是指值域为有界集的函数.

考察不等式(4.1). 对于所有的$x\in X$,$x\neq\theta$,由(4.1)得

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\leqslant c. \tag{4.2}$$

满足(4.2)的常数c中必有下确界,或者说比式$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$必有上确界存在.

定义4.2 设T是赋范空间X到赋范空间Y的有界线性算子.令

$$\|T\|=\sup_{x\in X,x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \tag{4.3}$$

$\|T\|$称为算子T的范数(norm).

若 $X=\{\theta\}$,则定义$\|T\|=0$. 显然,在这种情况下$T\theta=\theta$.

当T是X上的有界线性算子时,对每一个$x\in X$都有

$$\|Tx\|\leqslant\|T\|\cdot\|x\|. \tag{4.4}$$

引理4.3 设T是赋范空间X到赋范空间Y的有界线性算子,则

$$\|T\|=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|=\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|. \tag{4.5}$$

证明 对任意的$x\in X,x\neq\theta$,则$\frac{x}{\|x\|}$的范数为1,于是

$$\begin{aligned}\|T\|&=\sup_{x\in X,x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in X,x\neq\theta}\left\|T\frac{x}{\|x\|}\right\|\\&\leqslant\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|\leqslant\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|\\&\leqslant\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}\|T\|\|x\|=\|T\|.\end{aligned}$$

因此,(4.5)成立. □

例1 赋范空间X上的恒等算子$I:X\to X$定义为

$$Ix=x\quad(x\in X),$$

则I是有界线性算子且$\|I\|=1$.

例2 赋范空间X上的零算子$O:X\to Y$定义为

$$Ox=\theta\quad(x\in X),$$

则O是有界线性算子且$\|O\|=0$.

例3 设$T:C[a,b]\to C[a,b]$定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\quad(x\in C[a,b]),$$

则T是线性算子. 对任意$x\in C[a,b]$, $\|x\|=1$, 有

$$\|Tx\|=\max_{a\leq t\leq b}|(Tx)(t)|=\max_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq\max_{a\leq s\leq b}|x(s)|\cdot(b-a)=b-a,$$

故T是有界的且$\|T\|\leq b-a$. 另一方面, 取$x_0(t)\equiv1$, 则

$$\|T\|=\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geq\|Tx_0\|=\max_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t 1\mathrm{d}s\right|=b-a.$$

因此, $\|T\|=b-a$.

例4 设积分算子$T:C[a,b]\to C[a,b]$定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\quad(x\in C[a,b]),$$

其中$k(t,s)$(称为T的核)在闭区域$[a,b]\times[a,b]$上连续. 易知T是线性算子. 对任意$x\in C[a,b]$,

$$\|Tx\|=\max_{a\leq t\leq b}|(Tx)(t)|=\max_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^b k(t,s)x(s)\mathrm{d}s\right|$$

$$\leq\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b|k(t,s)|\cdot|x(s)|\mathrm{d}s$$

$$\leq\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b|k(t,s)|\mathrm{d}s\cdot\max_{a\leq s\leq b}|x(s)|=\alpha\|x\|,$$

其中$\alpha=\max\limits_{a\leq t\leq b}\int_a^b|k(t,s)|\mathrm{d}s$. 因此$T$是有界的且$\|T\|\leq\alpha$.

下面证明相反的不等式成立, 设$M=\max\limits_{t,s\in[a,b]}|k(t,s)|$. 因为$\int_a^b|k(t,s)|ds$是$t$在$[a,b]$上的连续函数, 所以存在$t_0\in[a,b]$, 使

$$\alpha=\max_{a\leq t\leq b}\int_a^b|k(t,s)|\mathrm{d}s=\int_a^b|k(t_0,s)|\mathrm{d}s$$

令

$$Z_0(s)=\mathrm{sign}\,k(t_0,s)=\begin{cases}1, & 若\ k(t_0,s)\geq0\\-1, & 若\ k(t_0,s)<0.\end{cases}$$

显然 Z_0 是$[a,b]$上的可测函数．应用 Лузин 定理，对任意的 $\varepsilon>0$，存在一个测度小于$\frac{\varepsilon}{2M}$的集合 A 及$[a,b]$上的连续函数 x，使得 $|x(s)|\leqslant 1(s\in[a,b])$ 且 $x(s)=Z_0(s)(s\in[a,b]\setminus A)$．故$\|x\|=1$，在集 A 上$|x(s)-Z_0(s)|\leqslant 2$，于是

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \int_a^b |k(t_0,s)|\mathrm{d}s=\int_a^b k(t_0,s)Z_0(s)\mathrm{d}s \\
&\leqslant \left|\int_a^b k(t_0,s)x(s)\mathrm{d}s\right|+\left|\int_a^b k(t_0,s)\,(Z_0(s)-x(s))\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \|T\|\ \|x\|+\int_A |k(t_0,s)\|Z_0(s)-x(s)|\mathrm{d}s \\
&< \|T\|+2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\|T\|+\varepsilon
\end{aligned}
$$

由 ε 的任意性，便得到 $\alpha\leqslant\|T\|$．综合上面的证明便得到

$$
\|T\|=\alpha=\max_{a\ t\ b}\int_a^b |k(t,s)|\mathrm{d}s.
$$

例 5 设 $C^1[0,1]$是$[0,1]$上具有连续的一阶导函数的函数的全体．视 $C^1[0,1]$为$[0,1]$的子空间．考虑微分算子 $D:C^1[0,1]\to C[0,1]$，其定义为

$$
(Dx)(t)=\frac{\mathrm{d}\ (t)}{\mathrm{d}}\quad (x\in C^1[0,1]).
$$

显然，D 是线性的．但D不是有界的．事实上，取 $x_n\in C^1[0,1]$，$x_n(t)=t^n(n\in\mathbf{N})$，则对每一个 $n\in\mathbf{N}$有$\|x_n\|=1$ 且

$$
\|Dx_n\|=\max_{0\ t\ 1}|x_n'(t)|=\max_{0\ t\ 1}|nt^{n-1}|=n.
$$

这表明不存在一个固定的常数 c，使得$\frac{\|Dx_n\|}{\|x_n\|}=n\leqslant c$对任意的 n 都成立．故D不是有界的，或者说D是无界的．

现在我们证明，线性算子的有界性与连续性是等价的．

定理 4.4 设T是赋范空间X到赋范空间Y的线性算子，则

(1) T 在 X 上是连续的，当且仅当 T 在 X 上是有界的.

(2) 若 T 在某一点 $x_0\in X$ 连续，则 T 在 X 上连续.

证明 (1) 当 T 为零算子时，结论显然成立. 现设 $T\neq 0$.

"$\Leftarrow$" 设 T 是有界的. 任取 $x_0\in X$，对于任意的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{\|T\|}$，则对一切满足 $\|x-x_0\|<\delta$ 的 x 有

$$\|Tx-Tx_0\|=\|T(x-x_0)\|\leqslant\|T\|\|x-x_0\|<\|T\|\delta=\varepsilon.$$

由第二章定义 4.4 知，T 在点 x_0 连续. 由 x_0 的任意性，则得 T 在 X 上连续.

"$\Rightarrow$" 设 T 在 X 上连续，则 T 在点 $x_0\in X$ 连续. 于是，对 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，使得对一切满足 $\|x-x_0\|<\delta$ 的 x 有

$$\|Tx-Tx_0\|<\varepsilon=1. \tag{4.6}$$

任取 $y\in X, y\neq\theta$. 令 $x=x_0+\frac{\delta}{2\|y\|}y$，则 $x-x_0=\frac{\delta}{2\|y\|}y$，$\|x-x_0\|=\frac{\delta}{2}$. 由(4.6)式，得到

$$\begin{aligned}\|Tx-Tx_0\|&=\|T(x-x_0)\|=\left\|T\left(\frac{\delta}{2\|y\|}y\right)\right\|\\&=\frac{\delta}{2\|y\|}\|Ty\|<1,\end{aligned}$$

从而

$$\|Ty\|<\frac{2}{\delta}\|y\|.$$

记 $c=\frac{2}{\delta}$，则 c 是一个与 y 无关的常数且 $\|Ty\|\leqslant c\|y\|$. 这表明 T 是有界的.

(2) 由(1)的"$\Rightarrow$"部分的证明可知，若 T 在 X 的某一点 x_0 连续，则 T 是有界的. 从而由(1)，T 在 X 上连续. □

推论4.5 设 T 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的有界线性算子，

则下列结论成立.

(1) 若 $x_n \to x$, 则 $Tx_n \to Tx$.

(2) T 的零空间 $\mathscr{N}(T)$是闭的.

证明 (1) 由定理 4.4(1)及第二章定理 4.5 得证.

(2) 任取 $\mathscr{N}(T)$中的序列$\{x_n\}$, 若 $x_n \to x$, 由第二章定理 4.3(2), 只要证明 $x \in \mathscr{N}(T)$. 由(1), 若 $x_n \to x$, 则 $Tx_n \to Tx$. 并且由于 $Tx_n = \theta(n \in \mathbf{N})$, 必然 $Tx = \theta$, 因此 $x \in \mathscr{N}(T)$. □

设X和Y是在同一数域上的赋范空间. $\mathscr{B}(X,Y)$表示所有X到Y的有界线性算子的全体组成的集. 对于任意T, $S \in \mathscr{B}(X,Y)$和任意的数 α, $T+S$与 αT 定义为

$$(T+S)x = Tx + Sx$$

$$(\alpha T)x = \alpha Tx \qquad (x \in X).$$

显然, $T+S \in \mathscr{B}(X,Y)$, $\alpha T \in \mathscr{B}(X,Y)$. 并且按照上述加法运算和数乘运算 $\mathscr{B}(X,Y)$成为线性空间. 显然 $\mathscr{B}(X,Y)$ 中的零元素就是X到Y 的零算子[注]. 现在在$\mathscr{B}(X,Y)$上赋予范数. 对于$\mathscr{B}(X,Y)$中任一元素 T, T 的范数规定为算子范数$\|T\|$, (见(4.3)). 容易验证, 这样定义的范数满足范数公理($N1$), ($N2$), ($N3$). 例如验证($N3$)成立. 对于任意的 $x \in X$, 有

$$\|(T+S)x\| \leqslant \|Tx\| + \|Sx\| \leqslant (\|T\| + \|S\|)\|x\|,$$

因此$\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$. 归纳上述讨论, 我们已经得到了下面的定理.

定理 4.6 赋范空间X到赋范空间Y的所有有界线性算子的全体组成的线性空间 $\mathscr{B}(X,Y)$ 按通常的算子范数成为赋范空间, 即任意的$T \in \mathscr{B}(X,Y)$,

---

(注) 在本书中我们把赋范空间(如X 和Y)的零元素记为θ, 而把$\mathscr{B}(X,Y)$中的零元素记为0.

$$\|T\|=\sup_{x\in X,x\neq\theta}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\sup_{x\in X,\|x\|=1}\|Tx\|.$$

自然会提出这样一个问题：在什么条件下$\mathscr{B}(X,Y)$是Banach空间？下面的定理回答了这一问题. 值得指出，在下面定理的条件中并不要求X是完备的.

定理 4.7 若X是赋范空间，Y是Banach空间，则$\mathscr{B}(X,Y)$是Banach空间.

证明 设$\{T_n\}$是$\mathscr{B}(X,Y)$中任意的Cauchy序列，则对任意$\varepsilon>0$，存在正整数N，使得

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon\quad(n,m\geqslant N).\tag{4.7}$$

于是，对任意的$x\in X$，当$n,m>N$时，有

$$\|T_nx-T_mx\|=\|(T_n-T_m)x\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\|.\tag{4.8}$$

从(4.8)式可以看出，对每一个$x\in X$，$\{T_nx\}$是Y中的Cauchy序列. 由于Y是完备的，则对每一个$x\in X$可设$T_nx\to y\in Y$. 这样，定义了一个算子$T: X\to Y$，使得对每一个$x\in X$，

$$Tx=y=\lim_{n\to\infty}T_nx.$$

算子T是线性的，因为

$$\begin{aligned}T(\alpha x_1+\beta x_2)&=\lim_{n\to\infty}T_n(\alpha x_1+\beta x_2)\\&=\alpha\lim_{n\to\infty}T_nx_1+\beta\lim_{n\to\infty}T_nx_2\\&=\alpha Tx_1+\beta Tx_2.\end{aligned}$$

现证T是有界的且$T_n\to T$. 由(4.8)及范数的连续性，当$n>N$时，对任意的$x\in X$，

$$\|T_nx-Tx\|=\lim_{m\to\infty}\|T_nx-T_mx\|\leqslant\varepsilon\|x\|.\tag{4.9}$$

这表明，当$n>N$时，T_n-T是有界线性算子. 又T_n是有界的，所以 $T=T_n-(T_n-T)$是有界的，即$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. 并且由(4.9)得到

$$\|T_n - T\| = \sup_{\|x\|=1} \|(T_n - T)x\| \leqslant \varepsilon \quad (n > N).$$

因此 $T_n \to T(n\to\infty)$. □

关于有界线性算子的复合有如下结论.

定理 4.8 设 X,Y,Z 都是赋范空间, $T:X\to Y$, $S:Y\to Z$ 都是有界线性算子, 则 T 与 S 的复合 $S\circ T: X\to Z$ 也是有界线性算子.

证明 对每一个 $x\in X$, $(S\circ T)x = S(Tx)$. 显然 $S\circ T$ 是线性的. 对任意的 $x\in X$

$$\|(S\circ T)x\| \leqslant \|S\|\cdot\|Tx\| \leqslant \|S\|\cdot\|T\|\cdot\|x\|,$$

故 $S\circ T$ 是有界的, 且 $\|S\circ T\| \leqslant \|S\|\cdot\|T\|$. □

设 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, $S\in\mathscr{B}(Y,Z)$. 我们定义二算子 T 与 S 的乘积 ST 为 T 与 S 的复合, 即 $ST = S\circ T$, 或者

$$(ST)x = S(Tx) \quad (x\in X).$$

由定理4.8知, 算子乘积 $ST\in\mathscr{B}(X,Y)$ 且满足

$$\|ST\| \leqslant \|S\|\cdot\|T\|.$$

一般地, 设 X 是赋范空间. 若在 X 中定义了二个元素 x 与 y 的乘积运算, x 与 y 的乘积记为 xy, 并且满足

$$\|xy\| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|,$$

则称 X 为赋范代数(normed algebra). 当赋范代数 X 关于范数完备时, 则称 X 为 Banach 代数(Banach algebra). 由定理4.7及定理 4.8 知: 当 X 是 Banach 空间时, $\mathscr{B}(X,X)$ 是 Banach 代数.

习　题

1. 设 $C^1[0,1]$ 中的范数定义为

$$\|x\|_d = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|.$$

证明 $C^1[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 上的微分算子 D: $x(t)\mapsto \dfrac{dx(t)}{dt}$ 是有界的.

2. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，定义 l^2 上的左移算子 A_n 为

$$A_n x=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots).$$

证明 $A_n: l^2\to l^2$ 是有界的且 $\|A_n\|=1$.

3. 设 X,Y 是线性空间，$T: X\to Y$ 是线性算子，且 T 是满射. 证明:

(i) $T^{-1}: Y\to X$ 存在的充分必要条件是，若 $Tx=\theta$，则必有 $x=\theta$.

(ii) 若 T^{-1} 存在，则 T^{-1} 也是线性的.

4. 设 X,Y 是赋范空间，$T: X\to Y$ 是有界线性算子，且 T 是满射. 若存在正数 b，使得对一切 $x\in X$ 都有

$$\|Tx\|\geqslant b\|x\|,$$

则 $T^{-1}: Y\to X$ 存在，它也是有界线性算子并且 $\|T^{-1}\|\leqslant\dfrac{1}{b}$.

5. 设 (a_{ij}) 是无穷矩阵，满足 $\sup\limits_{i\in N}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<+\infty$. 对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$，定义算子 $T: l^\infty\to$:

$$Tx=(\eta_1,\eta_2,\cdots),\ \eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j\quad(i\in\mathrm{N}).$$

证明 T 是有界线性算子，且 $\|T\|=\sup\limits_{i\in N}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|$.

§5 有限维空间上的线性算子

在线性代数中，我们知道 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^m$（或者 $\mathbf{C}^n$ 到 $\mathbf{C}^m$）的线性算子与一个 $m\times n$ 矩阵相对应. 在本节中，我们指出从 n 维线性空间到 m 维线性空间的线性算子也与一个 $m\times n$ 矩阵相对应. 由此可见，矩阵是研究有限维空间上的线性算子的有力工具. 并且我们还将指出一个重要的结论：有限维赋范空间上的线性算子是有界的.

设 X,Y 是在同一数域 $\mathbf{K}$ 上的有限维空间，$\dim X=n$，$\dim Y=m$. 并设 $E=\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 中选定的一个基，$B=\{b_1,\cdots,b_m\}$ 是 Y 中选定的一个基，且 E 和 B 中的基元保持固定的次序. 考虑任

意的线性算子 $T: X \to Y$. 每一个 $x \in X$，在基 E 下有唯一的表示

(5.1) $$x = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n.$$

由于 T 是线性的，x 的象

(5.2) $$y = Tx = T\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k.$$

由于表示式(5.1)是唯一的，可见 T 完全由 $Te_1, \cdots, Te_n$ 唯一确定. 另一方面，x 的象 y 以及每一个 Te_k 在 Y 的基 B 下有唯一的表示

$$y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j b_j,$$

$$Te_k = \sum_{j=1}^{m} t_{jk} b_j \quad (k = 1, \cdots, n).$$

把上面二式代入(5.2)，得到

$$\sum_{j=1}^{m} \eta_j b_j = y = \sum_{k=1}^{n} \xi_k T e_k = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \sum_{j=1}^{m} t_{jk} b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{jk} \xi_k \right) b_j.$$

因为 $\{b_1, \cdots, b_m\}$ 线性无关，所以各个 b_j 的系数相等，即

(5.3) $$\eta_j = \sum_{k=1}^{n} t_{jk} \xi_k \; (j = 1, \cdots, m).$$

这样，我们得到结论：$x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$ 的象 $y = Tx = \sum_{j=1}^{m} \eta_j b_j$ 由(5.3)式确定.

(5.3)可以写为矩阵运算的形式

(5.4)
$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_{11} & \cdots t_{1n}\\ \vdots & \vdots\\ t_{m1} & \cdots t_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}.$$

记

$$T_{EB}=\begin{pmatrix}t_{11} & \cdots & t_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ t_{m1} & \cdots & t_{mn}\end{pmatrix},$$

则 n 维线性空间 X 到 m 维线性空间 Y 的线性算子 T 对应于一个(关于 X 和 Y 的确定的基和确定的基元次序的)矩阵 T_{EB}.

反过来，每一个 m 行 n 列矩阵 T_{EB} 决定了一个 X 到 Y 的线性算子 T，使得对于每一个 $x=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k\in X$，由(5.4)得到 η_1，$\cdots$，η_m，从而对应于 Y 中的一个元 $y=Tx=\sum\limits_{j=1}^{m}\eta_j b_j$.

定理 5.1 有限维赋范空间上的线性算子是有界的. 或者说设 X 是有限维赋范空间，Y 是赋范空间，$T:X\to Y$ 是线性算子，则 T 是有界的.

证明 设 $\dim X=n$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 X 中的一个基. 对于每一个 $x\in X$，x 可唯一表示为 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，于是

$$\|Tx\|=\left\|T\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\cdot\|Te_i\|$$

$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\cdot\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|.$$

应用引理 3.1，存在常数 $c>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\leqslant\frac{1}{c}\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|=\frac{1}{c}\|x\|.$$

综合起来，我们得到

$$\|Tx\|\leqslant\frac{1}{c}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|\cdot\|x\|=r\cdot\|x\|,$$

这里 $r=\frac{1}{c}\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|Te_i\|$ 是常数．因此T是有界的． □

习　　题

1. 设T: $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$，使得对 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathbb{R}^3$

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,-\xi_1-\xi_2).$$

求T的值域$\mathscr{R}(T)$，零空间$\mathscr{N}(T)$以及T对应的矩阵．

2. 设X是n维线性空间，Y是X的真子空间，取一固定点 $x_0\in X\setminus Y$．证明在X上存在一个线性泛函f，使得 $f(x_0)=1$ 且对一切 $x\in Y$ 有 $f(x)=0$．

3. 设f是n维线性空间X上的非零线性泛函．证明f的零空间$\mathscr{N}(f)$是$n-1$维的．

§6　有界线性泛函

设X是数域$\mathbb{K}$上的线性空间．若f: $X\to\mathbb{K}$是线性算子，则f称为X上的线性泛函(linear functional)．当$\mathbb{K}=\mathbb{R}$时，f称为实线性泛函；当$\mathbb{K}=\mathbb{C}$时，f称为复线性泛函．

设X是数域$\mathbb{K}$上的赋范空间．若f: $X\to\mathbb{K}$是有界线性算子，则f称为X上的有界线性泛函(bounded linear functional)．按照定义 4.1，若f是X上的有界线性泛函，则存在常数c，使得对所有的$x\in X$都有

$$|f(x)|\leqslant c\|x\|.$$

并且按照定义 4.2，f的范数$\|f\|$定义为

$$\|f\|=\sup_{x\in X,\quad x\neq\theta}\frac{|f(x)|}{\|x\|}.$$

由引理 4.3，还可以得到

$$\|f\|=\sup_{x\in X,\|x\|=1}|f(x)|=\sup_{x\in X,\|x\|\leqslant 1}|f(x)|.$$

这时，对每一个 $x\in X$ 都有

$$|f(x)|\leqslant\|f\|\cdot\|x\|.$$

由定理 4.4，可得到下面的定理.

定理 6.1 设 f 是赋范空间 X 上的线性泛函. 则 f 在 X 上连续，当且仅当 f 在 X 上是有界的.

举几个例子.

例 1 设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范空间. 范数 $\|\cdot\|$: $X\to\mathrm{R}$ 是 X 上的连续泛函，但不是线性泛函.

例 2 在 R^3 中取一固定点 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. 定义泛函 f: $\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}$ 使得对于每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in\mathrm{R}^3$,

$$f(x)=\xi_1\alpha_1+\xi_2\alpha_2+\xi_3\alpha_3.$$

f 显然是线性的. 而 $f(x)$ 实际上是向量 x 与固定向量 a 的数量积，于是

$$|f(x)|\leqslant\|a\|\cdot\|x\|,$$

故 f 是有界的且 $\|f\|\leqslant\|a\|$. 另一方面，取 $x_0=a$，则

$$|f(x_0)|=\|a\|\cdot\|a\|=\|a\|\cdot\|x_0\|,$$

于是 $\|f\|\geqslant\|a\|$. 综上所述，得到 $\|f\|=\|a\|$.

例 3 在闭区间 $[a,b]$ 上取一固定点 t_0. 定义泛函 f: $C[a,b]\to\mathrm{R}$（这里 $C[a,b]$ 是实空间），使得对每一个 $x\in C[a,b]$

$$f(x)=x(t_0).$$

f 显然是线性的. 由

$$|f(x)|=|x(t_0)|\leqslant\|x\|,$$

得到 f 是有界的且 $\|f\|\leqslant 1$. 另一方面，取 $x_0(t)\equiv 1$，则

$$|f(x_0)| = |x_0(t_0)| = 1 = \|x_0\|,$$

于是$\|f\| \geqslant 1$. 综上所述得到$\|f\| = 1$.

应用§4定理 4.6 的结论，我们给出下面的定义.

定义 6.2 设 X 是数域$\mathbb{K}$上的赋范空间. 我们把X上所有有界线性泛函的全体组成的赋范空间 $\mathscr{B}(X, \mathbb{K})$称为 X 的对偶空间(dual space)或称为共轭空间(conjugate space)，记为 X^*，即 $X^* = \mathscr{B}(x, \mathbb{K})$. 对每一个 $f \in X^*$，f 的范数定义为

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq \theta} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\|=1} |f(x)|.$$

由于 $\mathbb{R}$和 $\mathbb{C}$ 都是完备的，应用定理 4.7，可得到下面的定理.

定理 6.3 赋范空间 X 的对偶空间 X^*是 Banach 空间.

注 从理论上讲，在给出赋范空间 X 的对偶空间 X^* 的定义时，我们应该指出 X^*中有非零元素（即 X 上非零的有界线性泛函）存在. 由于在证明此问题中需要用到 Hahn-Banach 定理，我们把它放在下一章的推论 1.3 之后说明.

为了有助于理解对偶空间，在列举一些对偶空间的例子之前，我们介绍赋范空间同构的概念.

定义 6.4 设 X,Y 是赋范空间，$T: X \to Y$ 是线性算子. 若 T 是双射且保持范数，即对每一个 $x \in X$

$$\|Tx\| = \|x\|,$$

则 T 称为 X 到 Y 上的等距同构映射(isometric isomorphism).

若存在一个从赋范空间 X 到赋范空间 Y 上的等距同构映射，则 X 与 Y 称为是等距同构的(isometrically isomorphic)，或者说，X 和 Y 是两个等距同构的赋范空间.

由此定义可知，赋范空间 X 到赋范空间 Y 上的等距同构映射是等距映射（见第二章定义 4.7)，并且两个等距同构的赋范空

间作为线性空间是同构的（见定义 1.2）. 在等距同构的意义下，我们可以把两个等距同构的赋范空间 X 与 Y 看作是同一的，并且在此意义下可记为 $X=Y$. 这一认识将应用到下面的例子中.

例 4 $\mathbf{R}^n$ 的对偶空间是 $\mathbf{R}^n$，即 $(\mathbf{R}^n)^*=\mathbf{R}^n$.

证明 设 $f\in(\mathbf{R}^n)^*$，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，其中 e_i 的坐标除第 i 个是 1 外其余全是零 $(i=1,\cdots,n)$. 令 $\alpha_i=f(e_i)(i=1,\cdots,n)$. 则对于任意 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\in\mathbf{R}^n$，

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\alpha_i. \tag{6.1}$$

令 $a=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，则 $a\in\mathbf{R}^n$ 且 a 由 f 所唯一确定. 反之，对于每一个 $a\in\mathbf{R}^n$，由(6.1)式可唯一确定一个 $\mathbf{R}^n$ 上的线性泛函 f. 因此映射 $f\longmapsto a$ 是 $(\mathbf{R}^n)^*$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的映射并且显然是线性的. 现在证明这个映射保持范数. 对任意的 $x\in\mathbf{R}^n$，$f(x)$ 由(6.1)表出，应用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\alpha_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|x\|\cdot\|a\|,$$

故 $\|f\|\leqslant\|a\|$. 另一方面，取 $x_0=a$，则

$$|f(x_0)|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2=\|x_0\|\cdot\|a\|,$$

故 $\|f\|\geqslant\|a\|$. 因此 $\|f\|=\|a\|$. 这样，映射 $f\longmapsto a$ 是 $(\mathbf{R}^n)^*$ 到 $\mathbf{R}^n$ 上的线性映射，保持范数并且是双射. 因此 $(\mathbf{R}^n)^*$ 与 $\mathbf{R}^n$ 是等距同构的.

例 5 l^1 的对偶空间是 l^∞，即 $(l^1)^*=l^\infty$.

证明 设 $\{e_1,e_2,\cdots\}$ 是 l^1 的一个 Schauder 基，其中基元 e_i

的坐标除第 i 个是 1 外其余全是零($i\in\mathbf{N}$). 对于每一个 $x\in l^1$, x 有唯一的表示式 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$. 任取 $f\in(l^1)^*$, 令 $\alpha_i=f(e_i)$ ($i\in\mathbf{N}$). 由于 f 是线性和连续的, 则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i \tag{6.2}$$

令 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 由于 $\|e_i\|_1=1(i\in\mathbf{N})$,

$$|\alpha_i|=|f(e_i)|\leqslant\|f\|\cdot\|e_i\|_1=\|f\|\quad(i\in\mathbf{N}),$$

故 $a\in l^\infty$. 我们得到如下结论: a 由 f 所唯一确定且

$$\|a\|_\infty\leqslant\|f\|. \tag{6.3}$$

另一方面, 对于每一个 $b=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^\infty$, 由下式对应于 l^1 上的一个有界线性泛函 g:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\beta_i\quad(x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^1).$$

事实上, 易知 g 是线性的, 并且由于

$$|g(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\beta_i|\leqslant\sup_{i\in N}|\beta_i|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|=\|b\|_\infty\cdot\|x\|_1,$$

我们得到 g 是有界的且

$$\|g\|\leqslant\|b\|_\infty. \tag{6.4}$$

上面的讨论表明: 映射 $f\longmapsto a$ 是$(l^1)^*$到 l^∞上的线性映射并且是双射. 当 g 与它的对应 b 换为 f 与它的对应 a 时, (6.4)式就变为$\|f\|\leqslant\|a\|_\infty$. 加之(6.3) 式, 我们得到$\|f\|=\|a\|_\infty$. 这表明映射 $f\longmapsto a$ 是保持范数的. 因此$(l^1)^*$与 l^∞是等距同构的.

例 6 l^p 的对偶空间是 $l^q\left(1<p<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$, 即 $(l^p)^*=l^q$.

证明 设$\{e_1,e_2,\cdots\}$是 l^p 的一个 Schauder 基，其中基元 e_i 的坐标除第 i 个是 1 外其余全是零($i\in\mathrm{N}$)．对于每一个 $x\in l^p$，x 有唯一的表示式 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$. 任取 $f\in(l^p)^*$，令 $\alpha_i=f(e_i)\,(i\in\mathrm{N})$. 由于 f 是线性和连续的，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i. \tag{6.5}$$

令$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 下面我们证明$a\in l^q$. 为此，取$x_n=(\xi_1^{(n)}\ \xi_2^{(n)},\cdots)$ ($n\in\mathrm{N}$)，其中

$$\xi_i^{(n)}=\begin{cases}\dfrac{|\alpha_i|^q}{\alpha_i}，& 若\ i\leqslant n\ 且\ \alpha_i\neq 0\\ 0，& 若\ i>n\ 或\ \alpha_i=0.\end{cases} \tag{6.6}$$

由(6.5)及(6.6)式，我们得到

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(n)}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q.$$

由(6.6)式及关系式 $pq-p=q$，有

$$f(x_n)=|f(x_n)|\leqslant\|f\|\cdot\|x_n\|_p=\|f\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^{pq-p}\right)^{\frac{1}{p}}=\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

综合上面二式，得到

$$f(x_n)=\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\leqslant\|f\|\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}.$$

上式两端同除以 $\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{p}}$，得到

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{1-\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|.$$

因为 n 是任意的，因此令 $n\to\infty$ 时，便得到

$$\|a\|_q=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\|f\|. \tag{6.7}$$

这证明了 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^q$.

另一方面，对于每一个 $b=(\beta_1,\beta_2,\cdots)\in l^q$，由下式对应于 l^p 上的一个有界线性泛函 g:

$$g(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\beta_i\quad(x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p).$$

事实上，g显然是线性的，并且由 Hölder 不等式

$$|g(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\beta_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\beta_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\|x\|_p\cdot\|b\|_q.$$

因此 g 是有界的且

$$\|g\|\leqslant\|b\|_q. \tag{6.8}$$

上面的讨论表明：映射 $f\longmapsto a$ 是$(l^p)^*$到 l^q 上的线性映射并且是双射. 当 g 与它的对应 b 换为 f 与它的对应 a 时，(6.8)式就变为$\|f\|\leqslant\|a\|_q$. 加之(6.7)式，我们得到 $\|f\|=\|a\|_q$. 这表明映射 $f\longmapsto a$ 是保持范数的. 因此$(l^p)^*$与 l^q 是等距同构的.

由于篇幅所限，下面的例子我们仅给出结论而略去它们的证明.

例 7 $c_0^*=l^1$. 这里c_0是收敛于零的序列的全体，按通常序列的线性运算和上确界范数成为 Banach 空间. 取与例 5 (或例 6)中相同的 Schauder 基$\{e_1,e_2,\cdots\}$，于是对每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)$

$\in c_0$，x有唯一的表示式$x=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i e_i$. 对于$f\in c_0^*$，令$\alpha_i=f(e_i)$ $(i\in\mathbf{N})$，则有如下结论，在等距同构映射下，每一个$f\in c_0^*$对应于$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^1$，使得

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i \quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c_0),$$

并且 $\|f\|=\|a\|_1=\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$.

例 8 $c^*=l^1$. 这里c是收敛序列的全体所组成的空间，按通常序列的线性运算和上确界范数成为Banach空间. 取一个Schauder基$\{e_1,e_2,\cdots\}$，其中$e_i(i\in\mathbf{N})$与例5（或例6）中的基元相同，$e=(1,1,\cdots)$，于是对每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c$，$x$有唯一的表示式$x=(\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n)e+\sum_{i=1}^{\infty}(\xi_i-\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n)e_i$. 对于$f\in c^*$，令$\alpha=f(e)-\sum_{i=1}^{\infty}f(e_i)$，$\alpha_i=f(e_i)$，则有如下结论：在等距同构映射下，每一个$f\in c^*$对应于$a=(\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^1$，使得

$$f(x)=\alpha\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i \quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c),$$

并且$\|f\|=\|a\|_1=|\alpha|+\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|$.

例 9 $(L^p[a,\ b])^*=L^q[a,b]$ $\left(1<p<\infty,\ \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1\right)$.

在等距同构映射下，每一个$f\in(L^p[a,b])^*$对应于$g\in L^q[a,b]$，使得对每一个$x\in L^p[a,b]$

(6.9) $$f(x)=\int_a^b x(t)g(t)\mathrm{d}t,$$

并且 $\|f\|=\|g\|_q=\left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}$.

例 10 $(L[a,b])^*=L^\infty[a,b]$.

在等距同构映射下，每一个$f\in(L[a,b])^*$对应于$g\in L^\infty[a,b]$，使得对每一个 $x\in L[a,b]$ 泛函 f 仍可以由 g 按照(6.9)的形式表示出来，并且$\|f\|=\|g\|_\infty$，这里

$$\|g\|_\infty=\inf_{\substack{m(E)=0\\E\subset[a,b]}}\sup_{t\in[a,b]\setminus E}|g(t)|.$$

$L^\infty[a,b]$中的元素 g 常称为本性有界可测函数，即除去一个零测度集 E 外，$g(t)$在$[a,b]\setminus E$ 上是有界的.

例 11 $(c[a,b])^*=\mathrm{NBV}[a,b]$.

我们用 $\mathrm{BV}[a,b]$表示在$[a,b]$上所有有界变差函数组成的空间，即对每一个 $g\in\mathrm{BV}[a,b]$，g 是定义在$[a,b]$上的函数且

$$\mathrm{V}_a^b(g)=\sup\sum_{i=1}^n|g(t_i)-g(t_{i-1})|$$

是有限的，式中的上确界是遍取 $[a,b]$ 上所有如下的分法而得到的：

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b,$$

这里 n 以及 $t_1,t_2,\cdots,t_{n-1}$ 的选取都是任意的. $\mathrm{V}_a^b(g)$称为有界变差函数 g 的全变差(见第四章§5). 按通常函数的线性运算以及下列范数

$$\|g\|=|g(a)|+\mathrm{V}_a^b(g),$$

$\mathrm{BV}[a,b]$成为赋范空间.

$\mathrm{NBV}[a,b]$表示 $\mathrm{BV}[a,b]$中满足下列正规化条件的所有元素 g 构成的子空间：

$$g(a)=0,\ g(t+0)=\lim_{s\to t+0} g(s)=g(t) \quad (a\leqslant t<b).$$

可以证明：在等距同构映射下，每一个 $f\in(C[a,b])^*$ 对应于 $g\in\mathrm{NBV}[a,b]$，使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)\mathrm{d}g(t) \quad (x\in C[a,b]), \tag{6.10}$$

并且 $\|f\|=\|g\|=\mathrm{V}_a^b(g)$. 注意(6.10)中的积分是Riemann-Stieltjes积分.

习　题

1. 求 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ 的对偶空间，这里
$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i| \quad (x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n).$$

2. 证明 c_0 的对偶空间是 l^1.

3. 在实空间 $C[a,b]$ 上定义泛函 f，使得对每一个 $x\in C[a,b]$
$$f(x)=\sum_{i=1}^n \lambda_i x(t_i),$$
其中 $t_1,\cdots,t_n$ 是 $[a,b]$ 中 n 个不同的固定点，$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是一组固定的实数，证明 f 是有界的，并求出 f 的范数.

4. 在实空间 $C[a,b]$ 上给定一元 $y\in C[a,b]$，定义泛函 f_y，使得对每一个 $x\in C[a,b]$
$$f_y(x)=\int_a^b x(t)y(t)dt.$$
证明 f_y 是有界的，并且 $\|f_y\|=\int_a^b|y(t)|dt$.

第六章　赋范空间和Banach空间的基本定理

在赋范空间和Banach空间的理论及其应用中，Hahn-Banach定理，一致有界定理，开映射定理(及逆算子定理)和闭图象定理是几个极其重要的其本定理．它们构成了泛函分析理论发展的基础，这些基本定理的产生与数学的其他学科(例如计算数学、运筹学、微分方程、随机过程等)有密切的关系．同时这些基本定理又在这些学科的发展中具有重要的作用．

§1　Hahn-Banach 定理

在本节中所要介绍的 Hahn-Banach 定理是赋范空间中关于有界线性泛函的扩张定理．一般形式的 Hahn-Banach定理指出，在一般线性空间的子空间上定义的线性泛函，在一定的条件下，可以扩张到整个空间上去(详见下节)．如果把我们的讨论限制在赋范空间，那末 Hahn-Banach 定理在赋范空间中有如下的形式．

定理 1.1(Hahn-Banach)．设M是赋范空间X的子空间，f是M上的有界线性泛函，则存在一个X上的有界线性泛函$\tilde{f}$，使得

(i) $\tilde{f}$是f在X上的扩张，即对一切$x\in M$有$\tilde{f}(x)=f(x)$;

(ii) $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_M$，这里$\|\tilde{f}\|_X$表示$\tilde{f}$作为X上的有界线性泛函的范数，$\|f\|_M$表示f作为M上的有界线性泛函的范数．

此定理的证明，我们将在下一节中专门阐述．

Hahn-Banach 定理告诉我们，在赋范空间的子空间上定义的有界线性泛函可以扩张到整个空间上去而且保持范数不变．下面介绍此定理的几个重要的推论，它们与定理本身一样，在理论和应

用中具有重要的作用.

推论 1.2 设M是赋范空间X的子空间,$x_0\in X\setminus M$. 若

$$h=d(x_0,M)=\inf_{x\in M}\|x_0-x\|>0,$$

则必存在$f\in X^*$满足下列条件:

(i) 对每一个$x\in M$,$f(x)=0$;

(ii) $f(x_0)=h$;

(iii) $\|f\|=1$.

证明 令$M_1=\operatorname{span}(\{x_0\}\cup M)$,则$M_1$可以表示为

$$M_1=\{\alpha x_0+x\mid x\in M,\alpha\in\mathbb{K}\}$$

并且M_1是X的子空间. 在M_1上定义泛函g,

$$g(\alpha x_0+x)=\alpha h\qquad(\alpha x_0+x\in M_1).$$

容易验证g是M_1上的线性泛函且满足

(1) 对每一个$x\in M$,$g(x)=g(0x_0+x)=0$;

(2) $g(x_0)=g(x_0+\theta)=h$;

(3) $\|g\|_{M_1}=1$. 事实上,对任何$\alpha x_0+x\in M_1$,若$\alpha\neq 0$,注意到当$x\in M$时有$-\dfrac{1}{\alpha}x\in M$,我们得到

$$\begin{aligned}|g(\alpha x_0+x)|&=|\alpha|h=|\alpha|\cdot\inf_{x\in M}\|x_0-x\|\\&\leqslant|\alpha|\left\|x_0-\left(-\frac{1}{\alpha}x\right)\right\|=\|\alpha x_0+x\|.\end{aligned}$$

当$\alpha=0$时,仍然有$|g(\alpha x_0+x)|\leqslant\|\alpha x_0+x\|$成立. 所以$g$是$M_1$上的有界线性泛函且$\|g\|_{M_1}\leqslant 1$. 另一方面,由$h$的定义,对任何$n\in\mathbb{N}$,存在$x_n\in M$,使得

$$\|x_0-x_n\|<h+\frac{1}{n}.$$

由于$h=|g(x_0-x_n)|\leqslant\|g\|_{M_1}\cdot\|x_0-x_n\|$,我们得到

$$\|g\|_{M_1} \geqslant \frac{h}{\|x_0 - x_n\|} > \frac{h}{h+\frac{1}{n}}.$$

当 $n\to\infty$时，则得$\|g\|_{M_1}\geqslant 1$. 因此$\|g\|_{M_1}=1$.

应用 Hahn-Banach 定理，存在 $f\in X^*$，使得 f 是 g 在 X 上保持范数的扩张，即 $f(x)=g(x)(x\in M_1)$，$\|f\|_X=\|g\|_{M_1}$. 从而 f 满足条件(i)，(ii)，(iii). □

特别地，在推论 1.2 中令$M=\{\theta\}$，则得到下面的推论：

推论 1.3 设X是赋范空间，$x_0\in X$，$x_0\neq\theta$，则在X上存在有界线性泛函 f 满足下列条件：

(i) $f(x_0)=\|x_0\|$；

(ii) $\|f\|=1$.

由此推论可知，每一个赋范空间X ($X\neq\{\theta\}$)的对偶空间 X^* 中都含有充分多的非零元素. 这一结论保证了建立在X的对偶空间 X^* 上的研究是有意义的. 这是 Hahn-Banach 定理在对偶空间理论的一个基本问题上的应用.

推论 1.4 设M是赋范空间X的子空间，则 $x_0\in \overline{M}$的充分必要条件是，X上任何满足 $f(x)=0(x\in M)$的有界线性泛函f必有 $f(x_0)=0$.

证明 必要性是明显的，现证充分性. 假若$x_0\notin\overline{M}$，则$h=d(x_0, M)>0$(第二章定理 2.11(5)). 应用推论 1.2，存在 $f\in X^*$，使得 $f(x)=0(x\in M)$，$f(x_0)=h$，此与假设矛盾. 故充分性得证. □

推论 1.5 设X是赋范空间，则对每一个 $x\in X$，x 的范数可表示为

$$\|x\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}. \tag{1.1}$$

因而，若对X上的一切有界线性泛函 f 都有 $f(x)=0$，则 $x=\theta$.

证明 设 $x\in X$，$x\neq\theta$(当 $x=\theta$ 时，结论显然成立). 对任意的

$f\in X^*$，由于 $|f(x)|\leqslant\|f\|\|x\|$，则得到

$$(1.2)\qquad \|x\|\geqslant\sup_{f\in X^*, f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

另一方面，由于 $x\neq\theta$，应用推论 1.3，存在 $f_0\in X^*$，使得 $f_0(x)=\|x\|$ 且 $\|f_0\|=1$. 于是

$$(1.3)\qquad \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|}\geqslant\frac{|f_0(x)|}{\|f_0\|}=\|x\|.$$

因此由(1.2)和(1.3)便得到(1.1)成立. □

Hahn-Banach 定理的应用的一个重要方面是研究凸集的分离问题. 这是凸分析和局部凸线性拓扑空间中的一个基本理论. 在这里，我们的讨论仅限制在赋范空间之中，讨论推论 1.2 和推论 1.3 的几何意义以及在凸集分离问题方面的应用.

定理 1.6 设 X 是一个线性空间，$M\subset X$. 若对于任意 $x,y\in M$ 均有

$$\{\lambda x+(1-\lambda)y\,|\,0\leqslant\lambda\leqslant 1\}\subset M,$$

则 M 称为 X 中的凸集(convex set).

集合 $\{\lambda x+(1-\lambda)y\,|\,0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 的几何意义是明显的. 在 $\mathbf{R}^2$ 中它就是联结 x 与 y 的线段.

例如，在赋范线性空间 X 中，以任一点 $x_0\in X$ 为中心、$r>0$ 为半径的开球 $B(x_0,r)$ 是一个凸集. 事实上，对于任意 $x,y\in B(x_0,r)$，有 $\|x-x_0\|<r$，$\|y-x_0\|<r$，于是当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ 时，

$$\begin{aligned}\|\lambda x+(1-\lambda)y-x_0\|&=\|\lambda(x-x_0)+(1-\lambda)(y-x_0)\|\\&<\lambda r+(1-r)r=r.\end{aligned}$$

故 $\lambda x+(1-\lambda)y\in B(x_0,r)$. 这说明 $B(x_0,r)$ 是凸集.

又如，线性空间的每一个线性子空间都是凸集.

凸集有下列简单的性质(其证明留给读者)：

(1) 若 M_1 和 M_2 是线性空间 X 中的凸集，则对任意的数 α,β

$$\alpha M_1+\beta M_2=\{\alpha x+\beta y\,|\,x\in M_1, y\in M_2\}$$

也是X中的凸集.

(2) 若$M_i(i\in D)$是线性空间X中的凸集，且$\bigcap\limits_{i\in D}M_i\neq\varnothing$，则$\bigcap\limits_{i\in D}M_i$也是$X$中的凸集.

(3) 若A是线性空间X的子集，则所有包含A的凸集的交

$$\bigcap\{M\mid M\text{是}X\text{中的凸集且}A\subset M\}$$

是X中包含A的最小凸集. 我们称它为A的凸包(convex hull)，记为$\mathrm{cov}A$. 可以证明

$$\mathrm{cov}A=\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\,\middle|\,x_i\in A,\ \lambda_i\geqslant 0\ (i=1,\cdots,n),\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1,\ n\in\mathbf{N}\right\}.$$

现设f是赋范空间X上的线性泛函. 对于固定的常数c，我们称

$$H(f,c)=\{x\in X\mid f(x)=c\}$$

为X中的一个超平面(hyperplane).

若取一点$x_0\in H(f,c)$，就有$f(x_0)=c$，则

$$H(f,c)=\mathcal{N}(f)+x_0,$$

其中$\mathcal{N}(f)=\{x\in X\mid f(x)=0\}$是$f$的零空间. 若$f$是实线性泛函，则满足$f(x)\leqslant c$的点$x$可认为都位于超平面$H(f,c)$的一侧，而满足$f(x)\geqslant c$的点$x$可认为都位于超平面$H(f,c)$的另一侧. 若$X$的子集$A$位于超平面$H(f,c)$的一侧并且有$x_0\in A\cap H(f,c)$，这时我们说超平面$H(f,c)$在$x_0$处支撑着$A$.

若f是赋范空间X上的有界线性泛函，由第五章推论4.5知零空间$\mathcal{N}(f)$是闭的. 因而这时超平面$H(f,c)$是闭的.

现在我们指出推论1.2的几何意义. 若x_0与赋范空间X的

子空间M的距离为$h>0$，则在X中存在一个闭超平面(例如可取$H(f,r)$，其中$0\leqslant r\leqslant h$，f为推论1.2中满足条件(i)，(ii)，(iii)的有界线性泛函)，使得M与x_0分隔于此闭超平面的两侧.

设x_0是赋范空间X中的某一非零元，记$r=\|x_0\|$. 推论1.3表明：在X中存在一个在x_0处支撑着闭球$\tilde{B}(\theta,r)=\{x\in X \mid \|x\|\leqslant r\}$的闭超平面$H(f,r)$（其中$f$是推论1.3中满足条件(i)，(ii)的有界线性泛函）. 这是因为对每一个$x\in\tilde{B}(\theta,r)$

$$f(x)\leqslant\|f\|\cdot\|x\|=\|x\|\leqslant r,$$

并且$x_0\in\tilde{B}(\theta,r)\cap H(f,r)$.

习 题

1. 设X是赋范空间，$x_0\in X$，$x_0\neq\theta$，则存在$f\in X^*$，使得$f(x_0)=1$且$\|f\|=\dfrac{1}{\|x_0\|}$.

2. 设X是赋范空间，$x_0\in X$. 若对X上一切范数为1的有界线性泛函f都有$|f(x_0)|\leqslant c$（常数），则$\|x_0\|\leqslant c$.

3. 设Y是赋范空间X的闭子空间，具有如下性质：对每一个$f\in X^*$，若$f(x)=0(x\in Y)$，则必有$f(x)=0(x\in X)$，证明$Y=X$.

4. 设X是赋范空间，$M\subset X$. 证明$x_0\in\overline{\mathrm{span}M}$，当且仅当对每一个$f\in X^*$，若$f|_M=0$，则必有$f(x_0)=0$.

* §2 Hahn-Banach 定理的证明

在本节中，我们将应用Zorn引理(见第一章§5)来证明Hahn-Banach扩张定理. 若不求理论的严密，读者可略去此节，而不会影响后面的学习.

我们应用Zorn引理可以证明一个更为一般的关于线性泛函的扩张定理. 为此，先介绍几个术语. 设X是一个线性空间，P是定义在X上的实值泛函. 若对于任何$x,y\in X$，

$$P(x+y)\leqslant P(x)+P(y),$$

则称P是次可加的(subadditive). 若对于任何 $\lambda\geqslant 0$,

$$P(\lambda x)=\lambda P(x),$$

则称P是正齐性的(positive-homogeneous). 若对于任何数域$\mathbb{K}$中的数入

$$P(\lambda x)=|\lambda|P(x)$$

则称P是绝对齐性的(absolute-homogeneous).

X 上具有次可加正齐性的泛函以及具有次可加绝对齐性的泛函是较广泛的一类泛函. 例如X上的范数是次可加绝对齐性泛函. 绝对齐次泛函一定是正齐性的，但正齐性泛函不必是绝对齐性的.

若P是X上的次可加绝对齐性泛函,则对任何 $x\in X$ 恒有

$$P(x)\geqslant 0. \tag{2.1}$$

事实上,对任何 $x\in X$,

$$P(x)=P(2x-x)\leqslant P(2x)+P(-x)=3P(x),$$

故 $2P(x)\geqslant 0$, 即 $P(x)\geqslant 0$.

下面，我们给出关于线性泛函扩张的 Hahn-Banach 定理.

定理 2.1(Hahn-Banach定理)设X是实线性空间,P是定义在X上的次可加正齐性泛函. 若 f 是定义在X的线性子空间Y上的实线性泛函且满足条件

$$f(x)\leqslant P(x)\quad (x\in Y),$$

则存在一个定义在X上实线性泛函$\tilde{f}$,满足

(1) $\tilde{f}$ 是 f 的扩张,即 $\tilde{f}(x)=f(x)\quad (x\in Y)$;

(2) $\tilde{f}(x)\leqslant P(x)\quad (x\in X)$.

证明 我们分两步来进行证明.

(a) 设$\mathfrak{M}$表示所有的有序对$(g,\mathscr{D}(g))$组成的集族,其中 g 是定义在$\mathscr{D}(g)$上的实线性泛函，$\mathscr{D}(g)$是X的线性子空间且满足下

列条件:

1° g 是 f 的扩张，即 $Y=\mathscr{D}(f)\subset\mathscr{D}(g)$ 且 $g(x)=f(x)\quad(x\in Y)$;

2° $g(x)\leqslant P(x)\quad(x\in\mathscr{D}(g))$.

易见 $\mathfrak{M}\neq\varnothing$,因为$(f,\mathscr{D}(f))\in\mathfrak{M}$. 在$\mathfrak{M}$中定义偏序"$\leqslant$",使得

$$(g_1,\mathscr{D}(g_1))\leqslant(g_2,\mathscr{D}(g_2))$$

意味着 g_2 是 g_1 的扩张,即

$$\mathscr{D}(g_1)\subset\mathscr{D}(g_2)\text{且 } g_1(x)=g_2(x)\quad(x\in\mathscr{D}(g_1)).$$

现在验证有序集$\mathfrak{M}$满足 Zorn 引理的条件. 设$\mathfrak{M}_0$是$\mathfrak{M}$中任意一个链. 令

$$E=\bigcup\{\mathscr{D}(g)\mid(g,\mathscr{D}(g))\in\mathfrak{M}_0\}.$$

则E是X的线性子空间. 事实上,对于$x,y\in E$,必存在$\mathfrak{M}_0$的元$(g_1, \mathscr{D}(g_1))$及$(g_2,\mathscr{D}(g_2))$,使得 $x\in\mathscr{D}(g_1)$ $y\in\mathscr{D}(g_2)$. 由于$\mathfrak{M}_0$是链,$(g_1,\mathscr{D}(g_1))$与$(g_2,\mathscr{D}(g_2))$是可以比较的. 不妨设$(g_1,\mathscr{D}(g_1))\leqslant(g_2,\mathscr{D}(g_2))$,于是$\mathscr{D}(g_1)\subset\mathscr{D}(g_2)$,从而 $x,y\in\mathscr{D}(g_2)$. 因此对于任何 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 有

$$\alpha x+\beta y\in\mathscr{D}(g_2)\subset E.$$

由于对任一 $x\in E$ 必存在$(g,\mathscr{D}(g))\in\mathfrak{M}_0$,使$x\in\mathscr{D}(g)$, 我们可定义一个$E$上的泛函 g_0,使得

$$g_0(x)=g(x)\quad\text{若 } x\in\mathscr{D}(g).$$

必须指出上述定义的 $g_0(x)$的值是唯一确定的. 因为若 $x\in\mathscr{D}(g_1)\cap\mathscr{D}(g_2)$, 而链$\mathfrak{M}_0$中的元$(g_1,\mathscr{D}(g_1))$与$(g_2,\mathscr{D}(g_2))$是可比较的,因此必有 $g_1(x)=g_2(x)$. 显然,$E=\mathscr{D}(g_0)$,$(g_0,\mathscr{D}(g_0))\in\mathfrak{M}$且$(g_0,\mathscr{D}(g_0))$是$\mathfrak{M}_0$的上界.

应用 Zorn 引理, $\mathfrak{M}$中存在极大元. 设其为$(\tilde{f},\mathscr{D}(\tilde{f}))$. 由$\mathfrak{M}$的定义可知,$\tilde{f}$是 f 的扩张并且

(2.2) $$\tilde{f}(x)\leqslant P(x)\quad(x\in\mathscr{D}(\tilde{f})).$$

(b) 下面只须证明$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$,从而$\tilde{f}$即为所求．假若$\mathscr{D}(\tilde{f})\neq X$,则可选取$y_1\in X\backslash\mathscr{D}(\tilde{f})$．令

$$Y_1=\{y+\alpha y_1 \mid y\in\mathscr{D}(\tilde{f}),\alpha\in\mathbf{R}\}.$$

每一个$x\in Y_1$可表示为$x=y+\alpha y_1$,并且此表示式是唯一的．事实上，若还有$y_0\in\mathscr{D}(\tilde{f})$及$\beta\in\mathbf{R}$使得$y+\alpha y_1=y_0+\beta y_1$,则$(\alpha-\beta)y_1=y_0-y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$．由于$y_1\notin\mathscr{D}(\tilde{f})$，必有$\alpha-\beta=0$及$y_0-y=\theta$．故$x$的表示式是唯一的．

对于任意的$y,z\in\mathscr{D}(\tilde{f})$,由(2.2)式及$P$的次可加性，我们有

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y)-\tilde{f}(z)=\tilde{f}(y-z)&\leqslant P(y-z)\\&\leqslant P(y+y_1)+P(-y_1-z),\end{aligned}$$

移项得

$$-P(-y,-z)-\tilde{f}(z)\leqslant P(y+y_1)-\tilde{f}(y).$$

上式右端不含z,则对任意的$y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$有

$$m=\sup_{z\in\mathscr{D}(\tilde{f})}\{-P(-y_1-z)-\tilde{f}(z)\}\leqslant P(y+y_1)-\tilde{f}(y),$$

由此得到

$$m\leqslant\inf_{y\in\mathscr{D}(\tilde{f})}\{P(y+y_1)-\tilde{f}(y)\}=M.$$

我们可选定一个常数c，使$m\leqslant c\leqslant M$．在Y_1上我们定义一个泛函g_1,使得对每一个$y+\alpha y_1\in Y_1$(即$y\in\mathscr{D}(\tilde{f}),\alpha\in\mathbf{R}$),

(2.3) $$g_1(y+\alpha y_1)=\tilde{f}(y)+\alpha c.$$

显然,g_1是线性的.当$\alpha=0$时,对任一$y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$都有$g_1(y)=\tilde{f}(y)$.因此$g_1$是$\tilde{f}$的扩张,并且显然$\mathscr{D}(\tilde{f})\subsetneqq Y_1=\mathscr{D}(g_1)$.

最后,我们还需要证明

(2.4) $$g_1(x)\leqslant P(x)\quad(x\in\mathscr{D}(g_1)).$$

于是$(g_1,\mathscr{D}(g_1))\in\mathfrak{M}$,此与$(\tilde{f},\mathscr{D}(\tilde{f}))$的极大性矛盾．由此便可证明$\mathscr{D}(\tilde{f})=X$.

当$\alpha=0$时,从(2.3)与(2.2)式易见(2.4)式成立.当$\alpha>0$时,

由于每一个 $x\in\mathscr{D}(g_1)=Y_1$ 可表示为 $x=y+\alpha y_1$ (这里 $y\in\mathscr{D}(\tilde{f})$)，注意到 c 的取法，我们有

$$c\leqslant M\leqslant P\left(\frac{y}{\alpha}+y_1\right)-\tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

从而

$$\alpha c\leqslant\alpha P\left(\frac{y}{\alpha}+y_1\right)-\tilde{f}(y).$$

由(2.3)及P的正齐性，从上式得到

$$g_1(x)=\tilde{f}(y)+\alpha c\leqslant\alpha P\left(\frac{y}{\alpha}+y_1\right)$$
$$=P(y+\alpha y_1)=P(x).$$

当 $\alpha<0$ 时，类似地，对每一个 $x=y+\alpha y_1\in\mathscr{D}(g_1)$，我们有

$$-P\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)-\tilde{f}\left(\frac{y}{\alpha}\right)\leqslant m\leqslant c.$$

上式两端同乘以 $-\alpha(>0)$，得到

$$\alpha P\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)+\tilde{f}(y)\leqslant-\alpha c.$$

由(2.3)及P的正齐性，得到

$$g_1(z)=\tilde{f}(y)+\alpha c\leqslant-\alpha P\left(-y_1-\frac{1}{\alpha}y\right)=P(x). \qquad \square$$

H. F. Bohnenblust 和 A. Sobczyk 把定理 2.3 推广到复线性空间，得到下面的定理.

定理 2.2 设X是实的或复的线性空间，P是定义在X上的次可加绝对齐性泛函. 若 f 是定义在X的线性子空间Y上的线性泛函且满足条件

$$|f(x)|\leqslant P(x) \qquad (x\in Y), \tag{2.5}$$

则存在一个定义在X上的线性泛函$\tilde{f}$，满足

(1) $\tilde{f}$ 是 f 的扩张，即 $\tilde{f}(x)=f(x) \quad (x\in Y)$;

(2) $|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x) \quad (x\in X)$.

证明 (a) 设X是实线性空间，f是Y上的实线性泛函. 由(2.5)知，对任意的$x\in Y$有$f(x)\leqslant P(x)$. 由定理2.3，存在一个X上的实线性泛函$\tilde{f}$，使得$\tilde{f}$是f的扩张，并且

$$\tilde{f}(x)\leqslant P(x) \qquad (x\in X).$$

由上式及P的绝对齐性，我们又有

$$-\tilde{f}(x)=\tilde{f}(-x)\leqslant P(-x)=P(x),$$

因此$|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x) \qquad (x\in X)$.

(b) 设X是复线性空间，f是Y上的复线性泛函. 我们令

$$f(x)=\mathrm{Re}f(x)+i\mathrm{Im}f(x) \qquad (x\in Y),$$

其中$\mathrm{Re}f(x)$与$\mathrm{Im}f(x)$分别是$f(x)$的实部和虚部，它们都是实值的. 由于f是线性的，对每一个$x\in Y$，有

$$i(\mathrm{Re}f(x)+i\mathrm{Im}f(x))=if(x)=f(ix)$$
$$=\mathrm{Re}f(ix)+i\mathrm{Im}f(ix).$$

上式两端的实部必须相等，我们得到$\mathrm{Im}f(x)=-\mathrm{Re}f(ix)$. 因此

$$f(x)=\mathrm{Re}f(x)-i\mathrm{Re}f(ix) \qquad (x\in Y). \tag{2.6}$$

当我们把X与Y都看作为实线性空间(即把其上的数乘运算限制在实数的范围内)时，为了区别起见，把它们分别记为X_r与Y_r. 于是，$\mathrm{Re}f$是Y_r上的实线性泛函，且

$$\mathrm{Re}f(x)\leqslant|f(x)|\leqslant P(x) \qquad (x\in Y_r).$$

应用定理2.3，存在一个X_r上的实线性泛函$\widetilde{\mathrm{Re}f}$，使得$\widetilde{\mathrm{Re}f}$是$\mathrm{Re}f$的扩张，并且

$$\widetilde{\mathrm{Re}f}(x)\leqslant P(x) \qquad (x\in X_r). \tag{2.7}$$

现在我们对每一个$x\in X$，令

$$\tilde{f}(x)=\widetilde{\mathrm{Re}f}(x)-i\,\widetilde{\mathrm{Re}f}(ix), \tag{2.8}$$

则由(2.6)知$\tilde{f}$是f的扩张，即$\tilde{f}(x)=f(x)(x\in Y)$. 我们只需要验证下面两点即可完成本定理的证明.

(i) $\tilde{f}$ 是复线性空间 X 上的线性泛函. 事实上，对任意的复数 $a+ib$(其中 a,b 都是实数)及任意的 $x\in X$(于是 $ix\in X$),

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}((a+ib)x) &= \widetilde{\mathrm{Re}f}(ax+ibx) - i\,\widetilde{\mathrm{Re}f}(iax-bx) \\
&= a\widetilde{\mathrm{Re}f}(x) + b\widetilde{\mathrm{Re}f}(ix) - ia\widetilde{\mathrm{Re}f}(ix) + ib\widetilde{\mathrm{Re}f}(x) \\
&= (a+ib)(\widetilde{\mathrm{Re}f}(x) - i\widetilde{\mathrm{Re}f}(ix)) \\
&= (a+ib)\tilde{f}(x).
\end{aligned}
$$

(ii) 对每一个 $x\in X$ 都有 $|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x)$. 事实上，若 $x\in X$ 使 $\tilde{f}(x)=0$, 则由(2.1)知 $P(x)\geqslant 0=\tilde{f}(x)$. 今设 $\tilde{f}(x)\neq 0$, 按复数的极化形式可记 $\widetilde{f(x)}=|\widetilde{f(x)}|e^{i\varphi}$, 则由(i)有

$$
|\tilde{f}(x)| = \tilde{f}(x)e^{-i\varphi} = \tilde{f}(xe^{-i\varphi}).
$$

从上式可知 $\tilde{f}(xe^{-i\varphi})$ 是一个实数，故由(2.8)式可得到

$$
\tilde{f}(xe^{-i\varphi}) = \widetilde{\mathrm{Re}f}(xe^{-i\varphi}),
$$

于是

$$
|\tilde{f}(x)| = \widetilde{\mathrm{Re}f}(xe^{-i\varphi}) \leqslant P(xe^{-i\varphi}) = |e^{i\varphi}|P(x) = P(x). \quad \square
$$

定理 2.3 和定理 2.4 表明，定义在线性空间的子空间上的线性泛函 f, 可以在某一泛函 P 的"控制"下，扩张为整个空间上的线性泛函 $\tilde{f}$. 由定理 2.4, 我们不难导出下面关于赋范空间中有界线性泛函保范扩张的 Hahn-Banach 定理.

定理 2.3(Hahn-Banach定理)　设 X 是赋范空间. 若 f 是定义在 X 的线性子空间 Y 上的有界线性泛函，则存在一个定义在 X 上的有界线性泛函 $\tilde{f}$, 满足

(1) $\tilde{f}$ 是 f 的扩张，即 $\tilde{f}(x)=f(x)$ $(x\in Y)$;

(2) $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Y$, 这里 $\|\tilde{f}\|_X$ 为 $\tilde{f}$ 在 X 上的范数，$\|f\|_Y$ 为 f 在 Y 上的范数.

证明　若 $Y=\{\theta\}$, 则 $f=0$, 这时 $\tilde{f}=0$ 即为所求. 今设 $Y\neq$

$\{\theta\}$. 对每一个 $x\in X$,令

$$P(x)=\|f\|_Y\|x\|.$$

显然,P 是 X 上次可加绝对齐性泛函,并且对每一个 $x\in Y$

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_Y\|x\|=P(x).$$

应用定理 2.4,存在一个 X 上的线性泛函 $\tilde{f}$, 使得 $\tilde{f}$ 是 f 的扩张且对每一个 $x\in X$

$$|\tilde{f}(x)|\leqslant P(x)=\|f\|_Y\|x\|.$$

故 $\tilde{f}$ 是有界的且 $\|\tilde{f}\|_X\leqslant\|f\|_Y$. 另一方面, 由于 $\tilde{f}$ 是 f 的扩张, 显然 $\|\tilde{f}\|_X\geqslant\|f\|_Y$. 因此 $\|\tilde{f}\|_X=\|f\|_Y$. □

§3 自反空间和伴随算子

设 X 是赋范空间. 当 $X\neq\{\theta\}$ 时, X 的对偶空间 X^* 中含有充分多的非零元素. 由第五章定理 6.3 知, X^* 是Banach 空间.

我们把 X^* 的对偶空间 $(X^*)^*$ 称为 X 的二次对偶空间(second dual space 或 bidual space),记为 X^{**},即

$$X^{**}=(X^*)^*.$$

类似地, 可以定义 X 的三次, 四次, …对偶空间, 并且分别记为 $X^{***}, X^{****}, \cdots$.

现在我们讨论 X 与 X^{**} 之间的关系. 对于任意的 $f\in X^*, x\in X$,我们记

(3.1) $\qquad f(x)=\langle f,x\rangle.$

关于(3.1)式可以从两个角度考虑: 若固定 f 让 x 在 X 中变动, 则在(3.1)式中 f 看作为 X 上的有界线性泛函; 若固定 x 让 f 在 X^* 中

变动，则在(3.1)式中 x 可看作为 X^* 上的线性泛函，或者更严格地说，x 对应于 X^* 上的线性泛函 F_x，这里 F_x 的定义为

$$(3.2) \qquad F_x(f)=\langle f,x\rangle \quad (f\in X^*).$$

下面的引理指出，F_x 是 X^* 上的有界线性泛函.

引理 3.1 对于赋范空间 X 上每一个固定的点 x，由(3.2)式定义的泛函 F_x 是 X^* 上的有界线性泛函，即 $F_x\in X^{**}$，并且

$$\|F_x\|=\|x\|.$$

证明 显然 F_x 是线性的. 由推论 1.5，

$$\|F_x\|=\sup_{f\in X^*,f\neq 0}\frac{|F_x(f)|}{\|f\|}=\sup_{f\in X^*,f\neq 0}\frac{|f(x)|}{\|f\|}=\|X\|. \qquad \square$$

上述引理表明，每一个 $x\in X$ 由(3.2)式对应于唯一的 $F_x\in X^{**}$. 于是，可定义一个映射 $\Phi: X\to X^{**}$，使得对每一个 $x\in X$

$$\Phi x=F_x.$$

Φ 称为 X 到 X^{**} 的典范映射 (canonical mapping) 或称为自然映射(natural mapping). 映射 Φ 是线性的，因为对每一个 $f\in X^*$

$$F_{\alpha x+\beta y}(f)=f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$$

$$=\alpha F_x(f)+\beta F_y(f)=(\alpha F_x+\beta F_y)(f).$$

由引理 3.1，映射 Φ 保持范数. 因此，Φ 是 X 到 $\Phi(x)$ 上的等距同构映射，$\Phi(x)$ 是 X^{**} 的一个子空间. 归纳起来，就得到下面的定理.

定理 3.2 赋范空间 X 到 X^{**} 的典范映射 Φ 是 X 到 X^{**} 的一个子空间 $\Phi(x)$ 上的等距同构映射.

下面我们再介绍一个常用的术语. 设 X 和 Y 是两个赋范空间.

若存在一个从X到Y的一个子空间上的等距同构映射Φ（即等距同构映射 $\Phi: X\to\Phi(x)\subset Y$），则称$X$可嵌入(embeddable)$Y$中. 定理 3.2 表明，在典范映射$\Phi$下$X$可嵌入 X^{**} 中，或者说X可以与X^{**}的一个子空间等同起来. 在这个意义下，可记为 $X\subset X^{**}$，或者 $X=\Phi(X)\subset X^{**}$.

一般地说，典范映射不是满射，也就是说 $\Phi(X)$ 是 X^{**} 的真子空间. 当Φ是满射的情况时，我们给出下面的定义.

定义 3.3 若赋范空间X上的典范映射Φ是满射，即$\Phi(X)=X^{**}$，则X称为是自反的(reflexive).

例如，$\mathbb{R}^n$ 的对偶空间仍然是 $\mathbb{R}^n$，因此 $\mathbb{R}^n$ 是自反的. 进一步讲，每一个有限维的赋范空间都是自反的. 又如 l^p 和 $L^p[a,b]$ $(1<p<\infty)$也都是自反的. 可以证明$C[a,b]$, c_0, c, l^1, l^∞, $L^1[a,b]$以及 $L^\infty[a,b]$等都不是自反的.

本节的第二部分讨论有界线性算子的伴随算子. 我们先给出伴随算子的定义及性质，然后以有限维空间为例说明. 伴随算子的定义实际上是矩阵的转置矩阵的概念的推广.

设T是赋范空间X到赋范空间Y的有界线性算子. 任取 $g\in Y^*$，对于每一个 $x\in X$，令 $y=Tx$，则映射

$$x\mapsto g(Tx)$$

定义了一个X上的线性泛函(因为g和T都是线性的)，记为$\hat{g}$，即$\hat{g}(x)=g(Tx)$ $(x\in X)$，或者说 $\hat{g}=gT$. 因为

$$|\hat{g}(x)|=|g(Tx)|\leqslant\|g\|\|Tx\|\leqslant\|g\|\|T\|\|x\|,$$

所以$\hat{g}$是有界的，从而 $\hat{g}\in X^*$，并且

$$\|\hat{g}\|\leqslant\|g\|\|T\|. \tag{3.3}$$

进一步讲，对于任意的 $g\in Y^*$，定义映射

$$g \mapsto \hat{g} = gT.$$

此映射是一个从 Y^* 到 X^* 的算子，记为 $T^*: Y^* \to X^*$，即 $T^* g = \hat{g} = gT$，或者说，对于每一个 $x \in X$，$(T^* g)(x) = (gT)(x) = g(Tx)$. 归纳上面的讨论，得到下面的定义.

定义 3.4 设 X 和 Y 是赋范空间，$T: X \to Y$ 是有界线性算子. 定义 $T^*: Y^* \to X^*$ 为

$$T^* g = gT \quad (g \in Y^*), \tag{3.4}$$

则 T^* 称为 T 的伴随算子(adjoint operator)，或称为 T 的共轭算子(conjugate operator).

显然，(3.4)等价于对每一个 $x \in X$，有

$$(T^* g)(x) = g(Tx). \tag{3.5}$$

定理 3.5 设 X 和 Y 是赋范空间. 有界线性算子 $T: X \to Y$ 的伴随算子 $T^*: Y^* \to X^*$ 也是有界线性算子，且

$$\|T^*\| = \|T\|.$$

证明 T^* 是线性的，因为由(3.5)式，对每一个 $x \in X$ 有

$$\begin{aligned}(T^*(\alpha g_1 + \beta g_2))(x) &= (\alpha g_1 + \beta g_2)(Tx) \\ &= \alpha g_1(Tx) + \beta g_2(Tx) \\ &= (\alpha T^* g_1 + \beta T^* g_2)(x).\end{aligned}$$

现在证明 $\|T^*\| = \|T\|$. 由(3.3)式，有

$$\|T^* g\| = \|\hat{g}\| \leqslant \|g\| \cdot \|T\|,$$

故 T^* 是有界的且 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 为了证明相反的不等式成立，对每一个 $x \in X$，如果 $Tx \neq \theta$，应用推论 1.3，必存在 $g_0 \in Y^*$，使得

$$\|g_0\| = 1, \; g_0(Tx) = \|Tx\|.$$

于是，由伴随算子的定义，得到

$$\|Tx\| = g_0(Tx) = (T^* g_0)(x) \leqslant \|T^* g_0\| \|x\|$$

$$\leqslant \|T^*\|\|g_0\|\|x\| = \|T^*\|\|x\|.$$

对于使 $Tx=\theta$ 的 x，上式仍然成立．因此，我们得到

$$\|T\| \leqslant \|T^*\|.$$

故 $\|T^*\|=\|T\|$ 得证．□

例1 设 T：$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 是一个线性算子．令 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 $e_1=(1,0,\cdots)$，$e_2=(0,1,0,\cdots)$，$\cdots$，$e_n=(0,0,\cdots,0,1)$，则 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个基，同时也是 $(\mathbf{R}^n)^*$ 中的一个基；令 $\mathbf{R}^m$ 中的元素 $\bar{e}_1=(1,0,\cdots,0)$，$\bar{e}_2=(0\ 1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\bar{e}_m=(0,\cdots,0,1)$，则 $\{\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_m\}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个基，同时也是 $(\mathbf{R}^m)^*$ 中的一个基．从第五章 §5 的讨论可知，在上述 $\mathbf{R}^n$ 与 $\mathbf{R}^m$ 的给定的基下 T 对应于唯一的 $m\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix},$$

简记为 (t_{ij})．于是，对于任意的 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n$，$Tx=y$ 对应于下面的矩阵运算

$$\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

而 $y=(\eta_1,\cdots,\ \eta_m)\in\mathbf{R}^m$．如果我们把 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 中的元素的坐标都表示为列向量的形式，那末算子运算 $Tx=y$ 就与矩阵运算(3.6)一致起来了，即

$$Tx=\begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & \cdots & t_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}=y. \tag{3.7}$$

设 T 的伴随算子 T^*：$(\mathbf{R}^m)^*(=\mathbf{R}^m)\to(\mathbf{R}^n)^*(=\mathbf{R}^n)$．每一个

$$g=\begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}\in(\mathbb{R}^m)^*$$ 的象为

$$(3.8)\quad T^*g=\hat{g}=\begin{pmatrix} \hat{g}(1) \\ \vdots \\ \hat{g}(n) \end{pmatrix}\in(\mathbb{R}^n)^*.$$

由伴随算子的定义，$\hat{g}(x)=(T^*g)x=g(Tx)=g(y)$. 再由 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{R}^m$ 上的有界线性泛函的表示(见第五章 §6 例4)，得到

$$(3.9)\qquad (\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} \hat{g}(1) \\ \vdots \\ \hat{g}(n) \end{pmatrix}=\hat{g}(x)=g(y)=(\eta_1,\cdots,\eta_m)\begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}.$$

我们用符号 E^T 表示矩阵 E 的转置矩阵. 由(3.6)有

$$(\eta_1,\cdots,\eta_m)=\left[(t_{ij})\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}\right]^T=(\xi_1,\cdots,\xi_n)(t_{ij})^T.$$

把此式代入(3.9)，得到

$$(3.10)\qquad (\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} \hat{g}(1) \\ \vdots \\ \hat{g}(n) \end{pmatrix}=(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_n)(t_{ij})^T\begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}$$

对于任意的 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立. 因此，由(3.8)及(3.10)式得到

$$T^*g=\begin{pmatrix} \hat{g}(1) \\ \vdots \\ \hat{g}(n) \end{pmatrix}=(t_{ij})^T\begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}.$$

这表明 T^* 对应的矩阵是 $(t_{ij})^T$，它正是 T 所对应的矩阵 (t_{ij}) 的转置矩阵. 从这个例子我们看到，伴随算子的定义可理解为转置矩阵的概念的推广.

伴随算子有如下运算法则.

定理 3.6 设 X,Y 和 Z 是赋范空间. (1) 若 $S,T\in\mathscr{B}(X,Y)$,

$\alpha\in\mathbb{K}$,则

$$(S+T)^*=S^*+T^*,$$

$$(\alpha T)^*=\alpha T^*.$$

(2) 若 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, $S\in\mathscr{B}(Y,Z)$,则

$$(ST)^*=T^*S^*.$$

(3) 若 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$, T^{-1} 存在且 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$,则 $(T^*)^{-1}$ 存在且

$$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*.$$

证明 (1)与(2)是容易证明的,请读者自己完成. 关于(2),下图将有助于读者完成具体的证明.

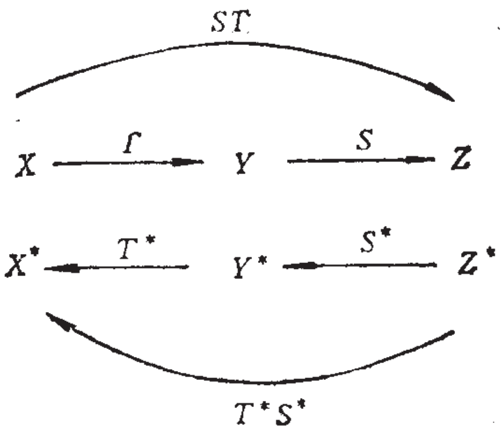


图 3.1

(3) 首先证明 T^* 是单射. 设 $g_1, g_2\in Y^*$, $g_1\neq g_2$ 要证明 $T^*g_1\neq T^*g_2$. 假若 $T^*g_1=T^*g_2$. 对于每一个 $y\in Y$,由于 T 是双射,必存在 $x\in X$,使得 $y=Tx$. 于是

$$\begin{aligned}(g_1-g_2)(y)&=(g_1-g_2)(Tx)=(T^*(g_1-g_2))(x)\\&=(T^*g_1-T^*g_2)(x)=0\end{aligned}$$

对每一个 $y\in Y$ 成立. 故必有 $g_1-g_2=0$,此与 $g_1\neq g_2$ 的假设矛盾. 因此,$T^*g_1\neq T^*g_2$.

次证 T^* 是满射. 对于任意的 $f\in X^*$ 和任意的 $x\in X$, 记 $y=$

Tx，由于 $T^{-1}\in\mathscr{B}(Y,X)$，故有 $(T^{-1})^*(f)\in Y^*$ 并且

$$f(x)=f(T^{-1}y)=((T^{-1})^*f)(y)$$
$$=((T^{-1})^*f)(Tx)=(T^*(T^{-1})^*f)(x),$$

所以，对任意的 $f\in X^*$

(3.11) $\qquad f=T^*(T^{-1})^*f.$

这证明了 T^* 是 Y^* 到 X^* 上的满射.

因此，T^* 是 Y^* 到 X^* 上的双射，从而 $(T^*)^{-1}$ 存在. 又由(3.11)知 $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$. □

设 T 是赋范空间 X 到赋范空间 Y 的有界线性算子. T 的伴随算子 T^* 是 Y^* 到 X^* 的有界线性算子. 因此 T^* 也有伴随算子 $(T^*)^*$. 我们记 $T^{**}=(T^*)^*$. 那末 T^{**} 是 X^{**} 到 Y^{**} 的有界线性算子；并且由定理 3.5

$$\|T^{**}\|=\|T^*\|=\|T\|.$$

对任意的 $f\in X^*$ 和任意的 $x\in X$，记 $x^{**}\in X^{**}$ 为典范映射 Tx 的对应元（这时 $x^{**}(f)=f(x)$），我们有

$$(T^{**}x^{**})(f)=x^{**}(T^*f)=(T^*f)(x)$$
$$=f(Tx)=(Tx)^{**}(f).$$

由于 f 的任意性，所以

(3.12) $\qquad T^{**}x^{**}=(Tx)^{**} \quad (x\in X).$

如果把 X 看作为 X^{**} 的子空间，这样 x 与 x^{**} 看作为同一元素，Tx 与 $(Tx)^{**}$ 看作为同一元素，于是(3.12)可写为

(3.13) $\qquad T^{**}x=Tx \quad (x\in X).$

这表明 T^{**} 可看作为 T 的扩张. 归结上面的讨论，我们实际上已经证明了如下的定理.

定理 3.7 设X和Y是赋范空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，则

$$\|T^{**}\|=\|T\|$$

且(3.12)成立．若将X看作为X^{**}的子空间，则T^{**}可看作是T的扩张．

习　　题

1. 证明自反空间是 Banach 空间．
2. 证明无限维赋范空间的对偶空间也是无限维空间．
3. 证明 Banach 空间X是自反的充分必要条件是X的任一闭子空间是自反的．
4. 证明 Banach 空间X是自反的充分必要条件是X^*是自反的．（提示：可利用上题的结论．）
5. 设X是赋范空间．若X^*可分，则X可分．
6. 证明l^1不是自反空间．（提示：可利用上题结论．）
7. 证明定理 3.6(1)和(2)．

§4　一致有界定理

我们先介绍有界算子序列的两种有界性的概念．

定义 4.1 设X和Y是赋范空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)(n\in\mathbf{N})$．若对每一个$x\in X$，序列$\{\|T_nx\|\}$是有界的，即存在(仅与$x$有关的)常数$M_x$，使得$\|T_nx\|\leqslant M_x(n\in\mathbf{N})$，则称算子序列$\{T_n\}$是强有界的(Strongly bounded)．若序列$\{\|T_n\|\}$是有界的，即存在常数M，使得$\|T_n\|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$，则称算子序列$\{T_n\}$是一致有界的(uniformly bounded)．

显然，一致有界的算子序列必然是强有界的．但是，其逆不成

立. 在本节中介绍的一致有界定理是 S. Banach 和 H. Steinhaus 在 1927 年归纳了一些数学家在数学的几个不同领域中所得到的类似结果而提出这个具有一般规律性的定理. 定理指出, 当X是 Banach 空间时, X上定义的强有界的有界算子序列是一致有界的. 由于定理所表达的事实, 很好地反映了两种不同的有界性的关系和特点, 在一些书中称此定理为共鸣定理. 一致有界定理的证明方法很多. 本节所给出的证明要用到闭球套定理.

引理4.2 设X是Banach空间, f_n是X上的连续泛函($n\in\mathrm{N}$). 若对每一个$x\in X$, 序列$\{f_n(x)\}$是有界的, 则序列$\{f_n(x)\}$必在某一闭球上一致有界(即存在 $M>0$, 使得对一切此闭球中的点 x 及 $n\in\mathrm{N}$ 都有$|f_n(x)|\leqslant M$).

证明 假若结论不成立, 即$\{f_n(x)\}$在任何闭球上都不是一致有界的. 任取闭球 $\tilde{B}_0\subset X$, 则有 $\tilde{B}_0$ 的内点 x_1 及 $n_1\in\mathrm{N}$, 使得 $|f_{n_1}(x_1)|>1$. 由假设f_{n_1}是连续的, 则存在闭球$\tilde{B}_1=\tilde{B}_1(x,r_1)\subset\tilde{B}_0$, 使得在 $\tilde{B}_1$ 上恒有$|f_{n_1}(x)|>1$. 再由假设$\{f_n(x)\}$在 $\tilde{B}_1$ 上不是一致有界的, 于是存在 $\tilde{B}_1$ 的内点 x_2 及 $n_2\in\mathrm{N}$ $(n_2>n_1)$, 使得 $|f_{n_2}(x_2)|>2$. 又由假设f_{n_2}是连续的, 则存在闭球$\tilde{B}_2=\tilde{B}_2(x_2,r_2)\subset\tilde{B}_1$ 并且可要求$r_2<\frac{r_1}{2}$, 使得在 $\tilde{B}_2$ 上恒有 $|f_{n_2}(x)|>2$. 照此作法继续作下去, 可得到一列闭球 $\tilde{B}_0,\tilde{B}_1,\tilde{B}_2,\cdots$, 满足

(i) $\tilde{B}_0\supset\tilde{B}_1\supset\tilde{B}_2\supset\cdots\supset\tilde{B}_i\supset\cdots$;

(ii) 对每一个 $x\in\tilde{B}_i$, 恒有$|f_{n_i}(x)|>i\,(i\in\mathrm{N})$;

(iii) $r_{i+1}<\frac{r_i}{2}<\cdots<\frac{r_1}{2^i}\,(i\in\mathrm{N})$.

由于X是完备的, 应用闭球套定理(第二章定理 5.6), 则存在 $x_0\in X$, 使得 $x_0\in\bigcap_{i\in\mathrm{N}}\tilde{B}_i$. 因此, 对每一个 $i\in\mathrm{N}$ 有$|f_{n_i}(x_0)|>i$, 此与$\{f_n(x_0)\}$的有界性矛盾, 引理得证. □

定理 4.3（一致有界定理，Banach-Steinhaus） 设 X 是 Banach 空间，Y 是赋范空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)(n\in\mathbf{N})$. 若对每一个 $x\in X$，序列 $\{\|T_nx\|\}$ 是有界的，则范数序列 $\{\|T_n\|\}$ 是有界的.

证明 令 $f_n(x)=\|T_nx\|(x\in X,\ n\in\mathbf{N})$，则 f_n 是 X 上的连续泛函且满足引理 4.2 的条件. 故存在闭球 $\tilde{B}_0=\tilde{B}_0(x_0,r_0)$，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $\tilde{B}_0$ 上一致有界，即存在 $M>0$，使得

$$\|T_nx\|=f_n(x)\leqslant M\ (x\in\tilde{B}_0,n\in\mathbf{N}). \tag{4.1}$$

任取 $x\in X$，$\|x\|=1$. 令 $y=x_0+r_0x$. 由于 $\|y-x_0\|=r_0$，则 $y\in\tilde{B}_0$. 根据(4.1)式有

$$\|T_ny\|\leqslant M\quad(n\in\mathbf{N}).$$

但 $T_ny=T_nx_0+r_0T_nx$，故 $T_nx=\dfrac{1}{r_0}(T_ny-T_nx_0)$. 于是

$$\begin{aligned}\|T_nx\|&=\frac{1}{r_0}\|T_ny-T_nx_0\|\\&\leqslant\frac{1}{r_0}\left(\|T_ny\|+\|T_nx_0\|\right)\leqslant\frac{2M}{r_0}.\end{aligned}$$

从而得到

$$\|T_n\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx\|\leqslant\frac{2M}{r_0}\ (n\in\mathbf{N}).$$

此定理得证. □

作为一致有界定理在 Fourier 级数理论中的应用，下面我们讨论以 2π 为周期的函数 x 的连续性与 x 的 Fourier 级数的收敛性之间是否具有一定的关系.

我们知道，以 2π 为周期的函数 x 的 Fourier 级数具有形式

$$\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{4.2}$$

其中 Fourier 系数

$$(4.3)\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt\quad(n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ntdt\quad(n=1,2,\cdots).$$

可以举出例子说明，存在一个以 2π 为周期的函数 x，它的 Fourier 级数是处处收敛的，但是 x 并不是连续的. 例如，读者可以考察下列函数

$$x(t)=\begin{cases}0 & 若\ -\pi\leqslant t<0\\ 1 & 若\ 0\leqslant t\leqslant\pi\end{cases}且\ x(t+2\pi)=x(t).$$

这说明，x的 Fourier 级数处处收敛不能推出x是连续的.

反过来，应用一致有界定理可以得到如下的结论：存在实值连续函数，它的 Fourier 级数在给定点 t_0 发散. 这说明，x 是连续的不能推出x 的 Fourier 级数处处收敛.

为证明此结论，记 $C_{2\pi}$ 为以 2π 为周期的实值连续函数的全体组成的集合. 按通常函数的线性运算及范数

$$\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 2\pi}|x(t)|,$$

$C_{2\pi}$ 是一个 Banach 空间. 由于 $C_{2\pi}$ 中的元素皆以 2π 为周期，所以不失一般性可设 $t_0=0$.

对每一个 $x\in C_{2\pi}$，令 $f_n(x)$ 为 x 的 Fourier 级数的前 n 项部分和在 $t=0$ 点的值. 由(4.2)和(4.3)并且注意到当 $t=0$ 时正弦项为 0 而余弦项为 1，于是得到

$$(4.4)\qquad f_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right]dt$$

为了简化上式，由计算得到

$$2\sin\frac{1}{2}t\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\sum_{k=1}^{n}\left[-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t+\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$=-\sin\frac{1}{2}t+\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$$

上式两边分别除以$\sin\frac{1}{2}t$ 且同加 1,得到

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}.$$

令 $q_n(t)=\dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}$. 当 $t=0$ 时定义 $q_n(0)=\lim\limits_{t\to 0}q(t)=2n+1$, 则 $q_n\in C_{2\pi}$. 这时(4.4)式变形为

$$f_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t)q_n(t)dt. \tag{4.5}$$

可以证明,f_n 是 $C_{2\pi}$ 上的有界线性泛函(见第五章 §6 习题 4)且

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|q_n(t)|dt.$$

当 $t\in(0,2\pi]$时,有$\left|\sin\frac{1}{2}t\right|<\frac{1}{2}t$. 令 $v=\left(n+\frac{1}{2}\right)t$, 则

$$\|f_n\|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{1}{2}t}\right|dt>\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{t}dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin v|}{v}dv$$

$$\geqslant\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(k+1)\pi}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin v|dv$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{k+1}\to\infty\quad(n\to\infty).$$

至此，我们证明了：(i) $C_{2\pi}$ 是 Banach 空间；(ii) $\|f_n\|\to\infty$. 因此必存在 $x_0\in C_{2\pi}$，使得$\{f_n(x_0)\}$发散. 因为，假若对每一个 $x\in C_{2\pi}$ $\{f_n(x)\}$收敛，从而有界，应用一致有界定理得到$\{\|f_n\|\}$有界. 此与(ii)矛盾. 这就证明了 $C_{2\pi}$ 中有一元素 x_0 的 Fourier 级数在 $t=0$ 处发散.

一致有界定理在分析学的很多方面具有广泛的应用. 在举例之前，我们应用一致有界定理讨论关于算子序列方面的问题，给出两个在应用中常用到的定理.

设X和Y是赋范空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)\ (n\in\mathbf{N})$. 若对每一个 $x\in X$ 序列$\{T_nx\}$都收敛，则可定义一个算子 $T: X\to Y$ 使得

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx\quad(x\in X).$$

可以举出例子说明：虽然每一个 T_n 都是有界的，但T不一定是有界的(见习题 4). 然而，若X是完备的，由于对每一个 $x\in X$ 序列$\{T_nx\}$都收敛，因而$\{\|T_nx\|\}$有界. 应用一致有界定理，$\{\|T_n\|\}$有界，即存在 $M>0$ 使得 $\|T_n\|\leqslant M\ (n\in\mathbf{N})$. 于是

$$\|T_nx\|\leqslant\|T_n\|\|x\|\leqslant M\|x\|,$$

令 $n\to\infty$，从上式得到 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，故T是有界的. 并且由

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|=\varliminf_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\|T_n\|\|x\|$$

知 $\|T\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$. 上述讨论可归结为下面的定理.

定理 4.4 设X是 Banach 空间，Y是赋范空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)\ (n\in\mathbf{N})$. 若对每一个 $x\in X$ 序列$\{T_nx\}$都收敛，则必存在 $T\in\mathscr{B}(X,Y)$使得 $Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx\ (x\in X)$且 $\|T\|\leqslant\varliminf\limits_{n\to\infty}\|T_n\|$.

下面一个定理在应用中也常常用到.

定理 4.5 设X和Y都是 Banach 空间，$T_n\in\mathscr{B}(X, Y)\ (n\in\mathbf{N})$. 则存在 $T\in\mathscr{B}(X, Y)$使得对每一个 $x\in X$ 都有$\lim\limits_{n\to\infty}T_nx=Tx$，

当且仅当下列两个条件同时成立.

(1) $\{\|T_n\|\}$是有界的.

(2) 对于X中的稠密集A的每一个元素x,序列$\{T_nx\}$收敛.

证明 "$\Rightarrow$"由假设对每一个$x\in X$序列$\{T_nx\}$收敛，从而$\{\|T_nx\|\}$有界. 由一致有界定理，则$\{\|T_n\|\}$有界. (2)显然成立.

"$\Leftarrow$"设$x\in X$，令$M=\sup\|T_n\|$. 对任意的$\varepsilon>0$，由A的稠密性,可取$x_0\in A$使得

$$\|x_0-x\|<\frac{\varepsilon}{3M}.$$

由(2)知$\{T_nx_0\}$收敛,则存在$n_0\in\mathbb{N}$使得当$m,n\geqslant n_0$时,

$$\|T_nx_0-T_mx_0\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因此当$m,n\geqslant n_0$时,

$$\begin{aligned}\|T_nx-T_mx\|&\leqslant\|T_nx-T_nx_0\|+\|T_nx_0-T_mx_0\|+\|T_mx_0-T_mx\|\\&<M\frac{\varepsilon}{3M}+\frac{\varepsilon}{3}+M\frac{\varepsilon}{3M}=\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明$\{T_nx\}$是Y中的 Cauchy 序列. 由于Y是完备的，则$\{T_nx\}$收敛. 于是可定义T: $X\to Y$使得对每一个$x\in X$,

$$Tx=\lim_{n\to\infty}T_nx.$$

由定理 4.4 知,$T\in\mathscr{B}(X,Y)$. □

在上述定理的必要性证明中,我们只用到空间X完备的条件.

例1 设 $1<p<\infty$ 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 若$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$满足如下条件:对每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$皆有$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k<\infty$, 则$a\in l^q$.

证明 令$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k$. 定义一个$l^p$上的线性泛函$f$,

使得

$$(4.6)\qquad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\xi_k\quad (x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p).$$

由Hölder不等式

$$|f_n(x)|\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\|x\|,$$

故 $f_n\in(l^p)^*(n\in\mathbf{N})$.

对每一个 $x\in l^p$，显然 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. 应用定理 4.4 得到 $f\in(l^p)^*=l^q$. 取 $e_1=(1,0,0,\cdots)$，$e_2=(0,1,0,\cdots)$，$\cdots$，可知 $f(e_n)=\alpha_n(n\in\mathbf{N})$. 在$(l^p)^*$与 l^q 的等距同构下（见第五章 §6 例 6），f 对应于 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$，故 $a\in l^q$.

例2 机械求积公式的收敛问题. 在闭区间 $[a,b]$上的全体实值函数组成的 Banach 空间$C[a,b]$上定义泛函f_n，使得对每一个 $x\in C[a,b]$

$$(4.7)\qquad f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k^{(n)}x(t_k^{(n)})\quad (n\in\mathbf{N}),$$

这里 $\alpha_0^{(n)},\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_n^{(n)}$ 是 $n+1$ 个实数，$t_0^{(n)},t_1^{(n)},\cdots,t_n^{(n)}$ 满足

$$a\leqslant t_0^{(n)}\leqslant t_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant t_n^{(n)}\leqslant b.$$

现在的问题是：在什么条件下，泛函 f_n 在每一个 $x\in C[a,b]$处的值 $f_n(x)$收敛于定积分 $\int_a^b x(t)dt$. 例如定积分近似计算中的梯形法，是取区间$[a,b]$上一组几等分点，即 $a=t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}=b$. 当 n 充分大时，

$$\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}x(t_0^{(n)})+x(t_1^{(n)})+\cdots+x(t_{n-1}^{(n)})+\frac{1}{2}x(t_n^{(n)})\right)$$

逼近于 $\int_a^b x(t)dt$. 下面的定理在理论上是一个重要的结论.

定理4.6(Стеклов-Szegö) 对于任意的$x\in C[a,b]$(实空间).(4.7)式定义的机械求积公式$f_n(x)$收敛于$\int_a^b x(t)dt$的充分必要条件是下列二条件成立:

(i) 存在常数$M>0$,使得$\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\leqslant M(n\in\mathbf{N})$;

(ii) 对每一个多项式$P, f_n(P)\to\int_a^b P(t)dt(n\to\infty)$.

证明 对于任意的实数$\alpha_0^{(n)},\alpha_1^{(n)},\cdots,\alpha_n^{(n)}$及$a\leqslant t_0^{(n)}\leqslant t_1^{(n)}\leqslant\cdots\leqslant t_n^{(n)}\leqslant b$,我们首先证明(4.7)式定义的泛函$f_n$是有界的且

$$\|f_n\|=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|. \tag{4.8}$$

事实上,显然成立着不等式

$$|f_n(x)|\leqslant\left(\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|\right)\|x\| \quad (x\in C[a,b]),$$

故f_n是有界的且$\|f_n\|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|$. 另一方面,对每一个$n\in\mathbf{N}$,可选取$[a,b]$上的连续函数$x_n(t)$,使得$\|x_n\|=1$且

$$x_n(t_k^{(n)})=\operatorname{sign}\alpha_k^{(n)} \quad (k=0,1,\cdots,n),$$

于是$|f_n(x)|=\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|$,故$\|f_n\|\geqslant\sum_{k=0}^{n}|\alpha_k^{(n)}|$. 因此(4.8)成立.

由Weierstrass逼近定理知,$[a,b]$上的多项式的全体在$C[a,b]$中稠密. 应用定理4.5,此定理立即得证.

习 题

1. 若$\{x_n\}$是Banach空间X中的序列,使得对每一个$f\in X^*$, $\{f(x_n)\}$是

有界的，则$\{\|x_n\|\}$是有界的.

2. 设$a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 若对每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in c_0$皆有$\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\alpha_i<\infty$，则$a\in l^1$.

3. 设X和Y是 Banach 空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)$ $(n\in\mathbf{N})$，则下列各条等价：

(i) $\{\|T_n\|\}$是有界的.

(ii) 对每一个$x\in X$，$\{\|T_nx\|\}$是有界的.

(iii) 对每一个$x\in X$及每一个$g\in Y^*$，$\{|g(T_nx)|\}$是有界的.

4. 在l^∞中，令

$$C_{00}=\{x\in l^\infty \mid x=(\xi_1,\xi_2,\cdots),\xi_i \text{ 中仅有有限个不为零}\}.$$

由第五章§2习题2知，C_{00}是l^∞的不完备的子空间. 对于每一个$x\in C_{00}$定义$T_n: C_{00}\to C_{00}$和$T: C_{00}\to C_{00}$，使得

$$T_nx=(\xi_1,2\xi_2,\cdots,n\xi_n,0,0,\cdots),$$
$$Tx=(\xi_1,2\xi_2,3\xi_3,\cdots).$$

利用此例说明：(1)一致有界定理(定理4.3)中空间完备性的假设是不可少的；(2)定理4.4中空间完备性的假设是不可少的.

§5 几种收敛性

在本节中，我们将分别介绍赋范空间中元素的序列，赋范空间上的算子序列和泛函序列的几种收敛性的定义. 各种不同的收敛性及其关系是泛函分析研究的重要内容，在理论研究和应用上都十分重要.

对于赋范空间中元素的序列，有下面两种收敛的概念.

定义 5.1 设X是赋范空间，$\{x_n\}$是X中的序列.

(1) 若存在$x\in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0,$$

则称序列$\{x_n\}$是强收敛的(strongly convergent)，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=x \text{ 或 } x_n\to x.$$

这时，x 称为$\{x_n\}$的强极限，并且称$\{x_n\}$强收敛于 x.

(2) 若存在 $x\in X$，使得对每一个 $f\in X^*$都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x),$$

则称序列$\{x_n\}$为弱收敛的(weakly convergent)，记为

$$(w)\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ 或 } x_n \xrightarrow{w} x.$$

这时，x 称为$\{x_n\}$的弱极限，并且称$\{x_n\}$弱收敛于 x.

序列$\{x_n\}$ 的强收敛实际上就是第五章 §2 中所说的序列$\{x_n\}$在范数下的收敛. 这里对于序列的弱收敛，我们给出下面的性质.

定理 5.2 若赋范空间X中的序列$\{x_n\}$弱收敛于 x，则

(1) $\{x_n\}$的弱极限 x 是唯一的;

(2) 序列$\{\|x_n\|\}$是有界的.

证明 (1) 若 $x_n\xrightarrow{w}x$ 且 $x_n\xrightarrow{w}y$，则对每一个 $f\in X^*$ 有

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(y),$$

故 $f(x-y)=f(x)-f(y)=0$. 应用推论 1.5, 得到 $x-y=\theta$, 故 $x=y$.

(2) 由于对每一个 $f\in X^*$, $f(x_n)\to f(x)$. 因而序列 $\{f(x_n)\}$ 有界，即存在仅与 f 有关的常数 c_f，使

$$|f(x_n)|\leqslant c_f \quad (n\in\mathbb{N}).$$

在典范映射 Φ: $X\to X^{**}$ 下，x_n 对应于 F_{x_n}，使得

$$F_{x_n}(f)=f(x_n) \quad (f\in X^*).$$

于是，对每一个 $f\in X^*$ 序列$\{F_{x_n}(f)\}$有界，由于 X^*完备，应用一致有界定理得到$\{\|F_{x_n}\|\}$有界. 而$\|F_{x_n}\|=\|x_n\|$，故$\{\|x_n\|\}$有界. □

关于序列的强收敛与弱收敛的关系，我们有下面的定理.

定理 5.3 设$\{x_n\}$是赋范空间X中的序列.

(1) 若$\{x_n\}$强收敛于 x，则$\{x_n\}$弱收敛于 x.

(2) 若X是有限维的，$\{x_n\}$弱收敛于 x，则$\{x_n\}$强收敛于 x.

证明 (1) 设$\{x_n\}$强收敛于x,则$\|x_n-x\|\to 0$. 于是对每一个$f\in X^*$,

$$|f(x_n)-f(x)|=|f(x_n-x)|\leqslant\|f\|\|x_n-x\|\to 0,$$

故$\{x_n\}$弱收敛于x.

(2) 设$x_n\xrightarrow{w}x$且$\dim X=k$. 记$\{e_1,\cdots,e_k\}$是X的一个基且

$$x_n=\alpha_1^{(n)}e_1+\cdots+\alpha_k^{(n)}e_k\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$x=\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ke_k.$$

定义泛函$f_i(i=1,\cdots,k)$,使得对每一个$x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ke_k\in X$

$$f_i(x)=\xi_i. \tag{5.1}$$

显然f_i是线性的. 由于X是有限维的, 则$f_i\in X^*$(见第五章定理3.1). 由(5.1)知$f_i(x_n)=\alpha_i^{(n)}$及$f_i(x)=\alpha_i(i=1,\cdots,k)$. 由于$x_n\xrightarrow{w}x$,则对每一个$i=1,\cdots,k$,

$$\alpha_i^{(n)}=f_i(x_n)\to f_i(x)=\alpha_i\quad(n\to\infty).$$

由此,我们得到

$$\|x_n-x\|=\left\|\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i^{(n)}-\alpha_i)e_i\right\|\leqslant\sum_{i=1}^{k}|\alpha_i^{(n)}-\alpha_i|\|e_i\|\to 0$$

故$\{x_n\}$强收敛于x. □

此定理表明,在有限维赋范空间中,序列的强收敛与弱收敛是等价的. 值得注意,当X是无限维的赋范空间时,弱收敛的序列不一定是强收敛的. 下面举一个例子.

例1 在$l^p(1<p<\infty)$空间中,e_n表示l^p中其第n个坐标为1其余坐标皆为零的元素. 关于序列$\{e_n\}\subset l^p$,有如下的结论.

(1) $\{e_n\}$弱收敛于θ. 因为对任意的$f\in(l^p)^*$, f对应于l^q(这里$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$)中的一个元素$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$满足

$$f(e_n)=\alpha_n\to 0\quad(n\to\infty).$$

(2) $\|e_n\|=1$,故$\{e_n\}$不是强收敛的.

算子序列有下面三种收敛的概念.

定义 5.4 设X和Y是赋范空间，$\{T_n\}\subset\mathscr{B}(X,Y)$，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$.

(1) 若$\{T_n\}$在算子范数下收敛于T，即$\|T_n-T\|\to0$，则称算子序列$\{T_n\}$是一致收敛的(uniformly convergent)，记为

$$\lim_{n\to\infty}T_n=T \text{ 或 } T_n\to T.$$

(2) 若对每一个$x\in X$，序列$\{T_nx\}$在Y中强收敛于Tx，则称算子序列$\{T_n\}$是强收敛的(strongly convergent)，记为

$$(s)\lim_{n\to\infty}T_n=T \text{ 或 } T_n\xrightarrow{s}T.$$

(3) 若对每一个$x\in X$序列$\{T_nx\}$在Y中弱收敛于Tx，则称算子序列$\{T_n\}$是弱收敛的(weakly convergent)，记为

$$(w)\lim_{n\to\infty}T_n=T \text{ 或 } T_n\xrightarrow{w}T.$$

从定义5.1知，$T_n\xrightarrow{s}T$意即对每一个$x\in X$有$\|T_nx-Tx\|\to0$；$T_n\xrightarrow{w}T$意即对每一个$x\in X$和每一个$g\in Y^*$有$|g(T_nx)-g(Tx)|\to0$.

定理 5.5 设X和Y是赋范空间，$T_n,T\in\mathscr{B}(X,Y)(n\in\mathbb{N})$.

(1) 若$\{T_n\}$一致收敛于T，则$\{T_n\}$强收敛于T.

(2) 若$\{T_n\}$强收敛于T，则$\{T_n\}$弱收敛于T.

证明 (1) 设$\{T_n\}$一致收敛于T，则$\|T_n-T\|\to0$. 于是对每一个$x\in X$

$$\|T_nx-Tx\|=\|(T_n-T)x\|\leqslant\|T_n-T\|\|x\|\to0,$$

故$\{T_n\}$强收敛于T.

(2) 设$\{T_n\}$强收敛于T，则对每一个$x\in X$序列$\{T_nx\}$在Y中强收敛于Tx. 由定理5.3(1)，$\{T_nx\}$弱收敛于Tx. 因此$\{T_n\}$弱收敛于T. □

值得注意，强收敛的算子序列不一定一致收敛；弱收敛的算子序列不一定强收敛. 我们各举一例如下.

例 2 在 $l^p(1\leqslant p<\infty)$中，定义"左移"算子 $T_n: l^p\to l^p$ 使得对每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$,

$$T_n x=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots).$$

则算子序列$\{T_n\}$强收敛于零算子. 事实上，对每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，由于$\|x\|=\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<+\infty$,则

$$\|T_n x\|=\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

故$\{T_n\}$强收敛于零算子.

但是$\{T_n\}$在 l^p 上不是一致收敛的. 因为，对于任意的 $n\in\mathbf{N}$,

$$\|T_n e_{n+1}\|=\|e_1\|=1,$$

(这里 e_n 是 l^p 中其第 n 个坐标为 1 其余坐标皆为零的元素)，故 $\|T_n\|\geqslant 1$. 因此$\{T_n\}$不一致收敛于零算子.

例 3 在 $l^p(1<p<\infty)$中，定义算子 $T_n: l^p\to l^p$ 使得对每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$

$$T_n x=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n\text{ 个 }0},\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

则算子序列$\{T_n\}$弱收敛于零算子. 事实上，对每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$ 及每一个 $f\in(l^p)^*$, f 对应于 $l^q\left(这里\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 中的一个元素$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$,使得 $f(e_n)=\alpha_n(n\in\mathbf{N})$. 当 $n\to\infty$时

$$f(T_n x)=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k\alpha_{k+n}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|\alpha_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}\to 0,$$

故$\{T_n\}$弱收敛于零算子.

但是$\{T_n\}$在l^p上不是强收敛的．因为对于$x=(1,0,0,\cdots)\in l^p$，当$m\neq n$时

$$\|T_m x-T_n x\|=(1^p+1^p)^{\frac{1}{p}}=2^{\frac{1}{p}}.$$

现在我们介绍赋范空间X上泛函序列的几种收敛的概念．这里，我们可以把泛函序列看作为对偶空间X^*中的元素的序列．因此，类似于定义5.1，我们可以定义泛函序列的强收敛和弱收敛．此外还有一个比弱收敛更为常用的弱*收敛．

定义5.6 设X是赋范空间，$\{f_n\}$是X^*中的序列．

(1) 若存在$f\in X^*$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0,$$

则称$\{f_n\}$是强收敛的(strongly convergent)，记为

$$\lim_{n\to\infty}f_n=f \quad 或\ f_n\to f.$$

(2) 若存在$f\in X^*$，使得对每一个$F\in X^{**}$有

$$\lim_{n\to\infty}F(f_n)=F(f),$$

则称$\{f_n\}$是弱收敛的(weakly convergent)，记为

$$(w)\lim_{n\to\infty}f_n=f \quad 或\ f_n\xrightarrow{w}f.$$

(3) 若存在$f\in X^*$，使得对每一个$x\in X$有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x),$$

则称$\{f_n\}$是弱*收敛的(weak* convergent)，记为

$$(w^*)\lim_{n\to\infty}f_n=f\ 或\ f_n\xrightarrow{w^*}f.$$

显然，当X是自反空间时，X上的泛函$\{f_n\}$的弱收敛与弱*收敛是一致的．关于X上的泛函序列的收敛性的讨论有类似于前面定理5.2及定理5.3的结论，我们不再赘述．

如果我们联系到上一节的定理4.5，用本节中的术语，可立即

得到关于算子序列强收敛的判定定理如下.

定理 5.7 设X和Y是Banach空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,Y)(n\in\mathbf{N})$，则存在$T\in\mathscr{B}(X,Y)$使$\{T_n\}$强收敛于$T$的充分必要条件是下列两个条件同时成立.

(1) $\{\|T_n\|\}$是有界的.

(2) 对于X中的稠密子集A的每一个元素x，序列$\{T_nx\}$收敛.

注意到X上的有界线性泛函序列$\{f_n\}$的弱*收敛实际上可以看作为X到数域$\mathbf{K}$的算子序列的强收敛，以及$\mathbf{K}$是完备的，我们从定理 5.7 可立即得到下面的定理.

定理 5.8 设X是 Banach 空间，$f_n\in X^*(n\in\mathbf{N})$，则存在$f\in X^*$使$\{f_n\}$弱*收敛于$f$的充分必要条件是下列两个条件同时成立.

(1) $\{\|f_n\|\}$是有界的.

(2) 对于X中的稠密子集A的每一个元素x，序列$\{f_n(x)\}$收敛.

空间中的序列及算子序列在不同的收敛意义下，可以在空间中建立不同的拓扑结构，于是相应地有不同意义的紧、列紧、闭等概念. 例如，在赋范空间中，我们曾用点列在范数意义下的收敛(即强收敛) 来定义列紧(也称为强列紧). 下面，我们可以用弱*收敛来定义弱*列紧.

定义 5.9 设X是赋范空间，$\Omega\subset X^*$. 若Ω中的任意点列$\{f_n\}$都有一个子序列$\{f_{n_k}\}$弱*收敛于$f\in X^*$,则称Ω是弱*列紧的(weak* sequentially compact).

由于强收敛的泛函序列是弱*收敛的,因此列紧集必是弱*列紧集. 反之,弱*列紧集不一定是列紧集.

由第五章推论 3.9 知,赋范空间的每一个有界子集是列紧的,

当且仅当 X 是有限维的. 但是，若 X^* 的每一个有界子集都是弱*列紧的，并不能得出 X 一定是有限维的结论.

定理 5.10 若赋范空间 X 是可分的，则对偶空间 X^* 中每一个有界集 Ω 都是弱* 列紧的.（这里 Ω 有界是指数集 $\{\|f\| \mid f\in\Omega\}$ 有界.）

证明 设 Ω 是 X^* 中的任一有界集，$\{f_n\}$ 是 Ω 中任一序列. 可设存在常数 $c>0$，使得

$$\|f_n\|\leqslant c \quad (n\in\mathbf{N}).$$

由假设 X 可分，于是 X 中有一可数稠密集 $\{x_n\}$. 对于 x_1，数列 $\{f_n(x_1)\}$ 有界，故它有一个收敛的子序列 $\{f_{1,n}(x_1)\}$，于是 $\{f_{1,n}\}$ 是 $\{f_n\}$ 的子序列. 对于 x_2，数列 $\{f_{1,n}(x_2)\}$ 有界，故它有一个收敛的子序列 $\{f_{2,n}(x_2)\}$，于是 $\{f_{2,n}\}$ 是 $\{f_{1,n}\}$ 的子序列. 如此继续下去，可得到如下可列个泛函序列:

$$\begin{array}{l} f_{1,1}, f_{1,2}, \cdots, f_{1,n}, \cdots \\ f_{2,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{2,n}, \cdots \\ \cdots\cdots \\ f_{n,1}, f_{n,2}, \cdots, f_{n,n}, \cdots \\ \cdots\cdots \end{array}$$

其中 $\{f_{k+1,n}\}$ 是 $\{f_{k,n}\}$ 的子序列 $(k\in\mathbf{N})$，并且对每一个 $x_k\in\{x_n\}$，数列 $\{f_{k,n}(x_k)\}$ 收敛. 在(5.2)中，取对角线上的泛函组成的序列

$$f_{1,1}, f_{2,2}, \cdots, f_{n,n}, \cdots.$$

容易看出 $\|f_{n,n}\|\leqslant c$ 并且对每一个 $k\in\mathbf{N}$，数列 $\{f_{n,n}(x_k)\}$ 都收敛. 由定理 5.8，则存在 $f\in X^*$ 使 $\{f_{n,n}\}$ 弱* 收敛于 f. 这就证明了 Ω 是弱*列紧的. □

习　题

1. 若 $\{x_n\}\subset C[a, b]$ 且 $x_n \xrightarrow{w} x\in C[a,b]$，则 $\{x_n\}$ 逐点收敛于 x，即对每一点 $t\in[a,b]$ 有 $x_n(t)\to x(t)$.

2. 设 X 和 Y 是赋范空间，$T\in\mathscr{B}(X,Y)$，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$. 若 $x_n\xrightarrow{w}x_0$，则

$Tx_n \xrightarrow{w} Tx_0$.

3. 设X是赋范空间，$\{x_n\}\subset X, Y=\mathrm{span}\{x_n\}, x_0\in X$. 若 $x_n \xrightarrow{w} x_0$，则 $x_0\in \overline{Y}$.

4. 设X是赋范空间，$E\subset X^*$且$\overline{\mathrm{span}E}=X^*$，$\{x_n\}$是$X$中的序列，$x\in X$. 若 $\sup\limits_n\|x_n\|<\infty$且对任意的 $f\in E$ 有 $f(x_n)\to f(x)$，则 $x_n \xrightarrow{w} x$.

5. 设X和Y是赋范空间，$T_n, T\in\mathscr{B}(X,Y)$ $(n\in\mathbf{N})$. 证明$\{T_n\}$一致收敛于T的充分必要条件是，对任意的 $\varepsilon>0$ 存在一个仅与 ε 有关的正整数N，使得对一切 $n>N$ 以及X中一切范数为1的元素 x 有

$$\|T_nx-Tx\|<\varepsilon.$$

6. 设X是赋范空间，$f_n\in X^*$ $(n\in\mathbf{N})$. 若$\{f_n\}$弱*收敛于 $f\in X^*$，则$\{f_n\}$的弱*极限是唯一的.

7. 证明 l^1 空间中的点列的弱收敛与强收敛是等价的.

§6 开映射定理与闭图象定理

在本节中，我们将讨论 Banach 空间理论中另外的两个主要定理，即开映射定理与闭图象定理. 这两个定理皆要求所讨论的空间具有完备性的条件. 由开映射定理，我们立即可以得到 Banach 空间之间的有界线性算子的逆算子存在的所谓“逆算子定理”. 这些定理在理论与实际中都具有广泛的应用.

在讨论开映射定理和逆算子定理之前，需要如下的预备知识.

定义 6.1 设 X 和Y是度量空间（或者更一般地可设为拓扑空间)，映射 $f:X\to Y$. 若 X 中的每一个开集G的象 $f(G)$是Y中的开集，则f 称为开映射(open mapping).

值得注意，连续映射不一定是开映射. 例如，映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 定义为 $f(t)=t^2(t\in\mathbf{R})$，则f是连续的. 但是f不是开映射，因为 $\mathbf{R}$ 中的开集$(-1,1)$的象 $f(-1,1)=[0,1)$不是 $\mathbf{R}$ 中的开集. 另一方面，开映射也不一定是连续映射.

现在，我们回顾一下逆映射的概念. 设 X 和 Y 是两个集，若映射 $T: X \to Y$ 是单射（一一映射），即对于任意的 x_1，$x_2 \in X$，若 $x_1 \neq x_2$，则 $Tx_1 \neq Tx_2$，这时存在定义在 T 的值域上的逆映射 $T^{-1}: \mathscr{R}(T) \to X$，使得每一个 $y \in \mathscr{R}(T)$ 对应于 $x = T^{-1}y$，满足 $Tx = y$，这时 $T(T^{-1}y) = y\,(y \in \mathscr{R}(T))$ 且 $T^{-1}(Tx) = x\,(x \in X)$.

如果 $T: X \to Y$ 是双射，那末 T 的逆映射 $T^{-1}: Y \to X$ 存在且满足

$$T^{-1}T = I_X, \quad TT^{-1} = I_Y.$$

这里 I_X 与 I_Y 分别表示 X 与 Y 上的恒等映射，即 $I_X x = x\,(x \in X)$，$I_Y y = y\,(y \in Y)$. 反过来，我们有下面的引理.

引理 6.2 设 $T: X \to Y$. 若有映射 $S: Y \to X$ 满足

$$ST = I_X, \quad TS = I_Y,$$

则 $T: X \to Y$ 是双射，且 $T^{-1} = S$.

证明 对于任意的 $x_1, x_2 \in X$，若 $Tx_1 = Tx_2$，由于 $ST = I_X$，我们有

$$x_1 = (ST)x_1 = S(Tx_1) = S(Tx_2) = (ST)x_2 = x_2,$$

故 T 是单射. 任取 $y \in Y$，由于 $TS = I_Y$，我们有

$$y = (TS)y = T(Sy)$$

若令 $x = Sy$，则 $x \in X$ 并且 $Tx = y$. 这表明 T 是满射. 因此 T 是双射. 这时 $T^{-1}: Y \to X$ 存在，并且

$$T^{-1} = (ST)T^{-1} = S(TT^{-1}) = S. \qquad \square$$

容易验证关于逆映射的如下运算性质成立.

引理 6.3 在下面的符号有意义的情况下

(1) $(T^{-1})^{-1} = T$;

(2) $(T_2T_1)^{-1} = T_1^{-1}T_2^{-1}$.

对于线性空间到线性空间的线性算子，它的逆算子存在的判定仅决定于该算子是否使得二线性空间的零元素之间的对应是一对一的. 这一结论包含在下面的引理中.

引理 6.4 设 X 和 Y 是（在同一数域 $\mathbb{K}$ 上的）线性空间，T:

$X \to Y$ 是线性算子,则

(1) $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 存在,当且仅当若 $Tx=\theta$ 则 $x=\theta$;

(2) 若 T^{-1} 存在,则 T^{-1} 是线性的.

证明 (1) "$\Leftarrow$"对任意的 $x_1,x_2\in X$,若 $Tx_1=Tx_2$,则

$$T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2=\theta.$$

由假设则得 $x_1-x_2=\theta$, 即 $x_1=x_2$. 这证明了 T 是单射, 故 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 存在.

"$\Rightarrow$"若 $Tx=\theta$,由于 T 是线性的, 则有 $T\theta=T(x-x)=\theta$. 这样,我们得到 $Tx=T\theta$. 由假设 T^{-1} 存在,则

$$x=T^{-1}(Tx)=T^{-1}(T\theta)=\theta.$$

(2) 设 $T^{-1}:\mathscr{R}(T)\to X$ 存在, 要证 T^{-1} 是线性的. 为此, 任取 $y_1,y_2\in\mathscr{R}(T)$以及任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{K}$, 记 $x_1=T^{-1}y_1, x_2=T^{-1}y_2$, 则 $x_1,x_2\in X$ 且 $Tx_1=y_1, Tx_2=y_2$. 由于

$$\alpha y_1+\beta y_2=\alpha Tx_1+\beta Tx_2=T(\alpha x_1+\beta x_2),$$

则

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha x_1+\beta x_2=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2,$$

故 T^{-1} 是线性的. □

在证明开映射定理之前, 先应用纲定理来证明一个必要的引理. 为了叙述方便, 我们将采用下面的记号: 若 A 是线性空间上的子集,对于给定的数 α 及 E 中的一点 x_0,我们记

$$\alpha A=\{\alpha x\mid x\in A\},$$
$$A+x_0=\{x+x_0\mid x\in A\}.$$

引理 6.5 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 若有界线性算子 T: $X\to Y$ 是满射, 则 X 的单位开球 $B_0=B(\theta,1)$的像 $T(B_0)$必含有一个以 $\theta\in Y$ 为中心的开球.

证明 证明分为下面几步完成.

(a) 记 $B_1=B\left(\theta,\frac{1}{2}\right)$,开球 B_1 的像的闭包 $\overline{T(B_1)}$含有一个开球 B^*.

对任何 $x\in X$，总有正整数 k 使 $x\in kB_1$，这只要取 $k>2\|x\|$即可．因此 $X=\bigcup_{k=1}^{\infty}kB_1$．由于$T$是线性的满射，故

$$Y=T(X)=T\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}kB_1\right)=\bigcup_{k=1}^{\infty}kT(B_1)=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{kT(B_1)}.$$

因Y完备，由纲定理（见第二章定理 6.2）知，必存在某个 k_0 使 $\overline{k_0T(B_1)}$含有一个开球，于是 $\overline{T(B_1)}$ 含有一个开球，设其为 $B(y_0,\varepsilon)$，简记为 B^*，即

$$B^*=B(y_0,\ \varepsilon)\subset\overline{T(B_1)}. \tag{6.1}$$

(b) 记 $B_n=B(\theta,2^{-n})$，开球 B_n 的像的闭包$\overline{T(B_n)}$ 含有一个以 $\theta\in Y$ 为中心的开球．

由(6.1)式可知，$B(\theta,\ \varepsilon)=B^*-y_0\subset\overline{T(B_1)}-y_0$．我们现在证明 $B(\theta,\varepsilon)\subset\overline{T(B_0)}$．为此只要证明

$$\overline{T(B_1)}-y_0\subset\overline{T(B_0)}. \tag{6.2}$$

设 $y\in\overline{T(B_1)}-y_0$，于是 $y+y_0\in\overline{T(B_1)}$．由 (6.1) 式，$y_0\in B^*\subset\overline{T(B_1)}$．因此存在 $u_n,v_n\in T(B_1)(n\in\mathbf{N})$，使 $u_n\to y+y_0,v_n\to y_0$，从而存在 $w_n,z_n\in B_1(n\in\mathbf{N})$，使

$$u_n=Tw_n\to y+y_0,v_n=Tz_n\to y_0.$$

然而，$\|w_n-z_n\|\leqslant\|w_n\|+\|z_n\|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，故 $w_n-z_n\in B_0$．由

$$T(w_n-z_n)=u_n-v_n\to y,$$

便得到 $y\in\overline{T(B_0)}$．由 y 的任意性知(6.2) 式成立．因此Y中以θ为中心的开球 $B(\theta,\varepsilon)\subset\overline{T(B_0)}$．由于$\overline{T(B_n)}=2^{-n}\overline{T(B_0)}$，故

$$B(\theta,\ \varepsilon2^{-n})\subset\overline{T(B_n)}. \tag{6.3}$$

这就证明了(b)．

(c) $T(B_0)$含有一个以 $\theta\in Y$ 为中心的开球 $B\left(\theta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$．

记Y中的开球

(6.4) $$V_n=B(\theta, \varepsilon 2^{-n}) \quad (n\in \mathbf{N}).$$

对任意的 $y\in V_1=B\left(\theta,\frac{\varepsilon}{2}\right)$，由(6.3)可知，$V_1\subset\overline{T(B_1)}$，故

$$B\left(y,\frac{\varepsilon}{4}\right)\cap T(B_1)\neq\varnothing,$$

即存在 $x_1\in B_1$ 使

$$\|y-Tx_1\|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此 $y-Tx_1\in V_2$. 由(6.3)和(6.4)又有 $V_2\subset\overline{T(B_2)}$. 同样可找到 $x_2\in B_2$，使

$$\|y-Tx_1-Tx_2\|<\varepsilon 2^{-3}.$$

因此 $y-Tx_1-Tx_2\in V_3\subset\overline{T(B_3)}$. 如此可继续下去，我们得到一个点列 $\{x_n\}$，其中 $x_n\in B_n$ 且满足

(6.5) $$\left\|y-T\sum_{k=1}^{n}x_k\right\|\leqslant\varepsilon 2^{-(n+1)} \quad (n\in\mathbf{N}).$$

令 $z_n=x_1+\cdots+x_n$. 因 $x_k\in B_k$，有 $\|x_k\|<2^{-k}$. 故对于 $n>m$

$$\|z_n-z_m\|\leqslant\sum_{k=m+1}^{n}\|x_k\|<\sum_{k=m+1}^{n}2^{-k}\to 0\,(m\to\infty).$$

因此 $\{z_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 由于 X 完备，可设 $z_n\to x\in X$. 而

$$\|x\|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}=1$$

可知 $x\in B_0$. 由 T 的连续性，得到 $Tz_n\to Tx$. 另一方面，由(6.5)又有 $Tz_n\to y$. 因此 $y=Tx\in T(B_0)$. 引理得证. □

定理 6.6(开映射定理) 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 若有界线性算子 $T:X\to Y$ 是满射，则 T 是开映射.

证明 设 A 是 X 中任一开集，要证明 $T(A)$ 是 Y 中的开集.

为此，任取 $y\in T(A)$，则存在 $x\in A$ 使 $y=Tx$. 由于 A 是开集，故存在 $r>0$ 使得 X 中的开球 $B(x,r)\subset A$，从而 $B(\theta,r)\subset A-x$. 令 $k=\dfrac{1}{r}$，则

$$B(\theta,1)=kB(\theta,r)\subset k(A-x).$$

由引理 6.5，$T(B(\theta,1))$ 含有一个在 Y 中以 θ 为中心的开球，设其为 $B_Y(\theta,\varepsilon)$，从而 $T(k(A-x))=k(T(A)-Tx)$ 含有此开球 $B_Y(\theta,\varepsilon)$，于是 $T(A)-Tx$ 含有开球 $B_Y(\theta,r\varepsilon)$. 因此 $T(A)$ 含有一个以 $Tx=y$ 为中心的开球 $B_Y(y,r\varepsilon)$. 由 y 的任意性，这就证明了 $T(A)$ 是 Y 中的开集. □

由开映射定理，立即可得到下面的逆算子定理.

定理 6.7（逆算子定理） 设 X 和 Y 是 Banach 空间. 若有界线性算子 $T:X\to Y$ 是双射，则 T 的逆算子 $T^{-1}:Y\to X$ 也是有界线性算子.

证明 由于 $T:X\to Y$ 是双射，则 $T^{-1}:Y\to X$ 存在. 且由引理 6.4 知 T^{-1} 是线性算子. 应用开映射定理，$T:X\to Y$ 是开映射，也就是说 $T^{-1}:Y\to X$ 是连续的（因为 X 中任一开集 G 在映射 T^{-1} 下的逆象 $(T^{-1})^{-1}(G)=T(G)$ 是 Y 中的开集），即 T^{-1} 是有界的. □

推论 6.8 设 $(X,\|\cdot\|_1)$ 和 $(X,\|\cdot\|_2)$ 是两个 Banach 空间. 若存在常数 $c_1>0$，使得对每一个 $x\in X$ 有

$$\|x\|_2\leqslant c_1\|x\|_1,$$

则存在 $c_2>0$，使得对每一个 $x\in X$ 有

$$\|x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2.$$

从而范数 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是等价的.

证明 由条件 $\|x\|_2\leqslant c_1\|x\|_1\ (x\in X)$，可知恒等算子

$$I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$$

是有界线性算子. 由逆算子定理，$I^{-1}:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$ 也是

有界线性算子，即存在 c_2(例如可取 $c_2=\|I^{-1}\|$)，使得对每一个 $x\in X$ 有

$$\|x\|_1=\|I^{-1}x\|_1\leqslant c_2\|x\|_2. \qquad \square$$

本节的以下部分是讨论闭图象定理.

定义 6.9 设X和Y是赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$是线性算子，其定义域 $\mathscr{D}(T)\subset X$. $X\times Y$ 中的集合

$$G(T)=\{(x,y)\mid x\in\mathscr{D}(T),y=Tx\}$$

称为算子 T 的图象 (graph). 易知 $X\times Y$ 按照如下定义的线性运算

$$(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2),$$
$$\alpha(x,y)=(\alpha x,\alpha y),$$

成为线性空间. 对于每一个 $X\times Y$ 中的元素(x,y),定义其范数为

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|, \tag{6.6}$$

则在此范数下 $X\times Y$ 是一个赋范空间. 若 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，则T称为闭线性算子 (closed linear operator)，简称为闭算子.

判定一个线性算子是否是闭算子常用到下面的引理.

引理 6.10 设 X 和Y是赋范空间, $T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子且 $\mathscr{D}(T)\subset X$, 则 T 是闭线性算子当且仅当对任意的 $x_n\in\mathscr{D}(T)$ ($n\in\mathbb{N}$), 若 $x_n\to x$ 以及 $Tx_n\to y$, 则 $x\in\mathscr{D}(T)$ 且 $Tx=y$.

证明 "$\Rightarrow$"对于任意的 $x_n\in\mathscr{D}(T)$ ($n\in\mathbb{N}$)，若 $x_n\to x$ 以及 $Tx_n\to y$, 则$(x_n,Tx_n)\in G(T)$并且$(x_n, Tx_n)\to(x,y)$. 由假设T是闭算子, 则$(x,y)\in G(T)$, 即 $x\in\mathscr{D}(T)$且 $Tx=y$.

"$\Leftarrow$"由定义要证明$G(T)$是闭集. 为此只要证明$\overline{G(T)}\subset G(T)$. 对任意的$(x,y)\in\overline{G(T)}$, 必存在$(x_n, Tx_n)\in G(T)$ ($n\in\mathbb{N}$), 使得$(x_n,Tx_n)\to(x,y)$, 则 $x_n\in\mathscr{D}(T)$ ($n\in\mathbb{N}$), $x_n\to x$ 且 $Tx_n\to y$. 由假设得到 $x\in\mathscr{D}(T)$, $Tx=y$. 这就是说$(x,y)\in G(T)$. $\square$

引理 6.11 设 X 和 Y 是赋范空间，$T:\mathscr{D}(T)\to Y$ 是线性算子且 $\mathscr{D}(T)\subset X$. 若 T 是有界的且 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 中的闭集，则 T 是闭算子.

特别地，当 $\mathscr{D}(T)=X$ 时，若 T 是有界线性算子，则 T 是闭算子.

证明 对任意的 $x_n\in\mathscr{D}(T)\,(n\in\mathbb{N})$，若 $x_n\to x$ 以及 $Tx_n\to y$，由于 $\mathscr{D}(T)$是闭集，则 $x\in\overline{\mathscr{D}(T)}=\mathscr{D}(T)$. 由于 T 是有界的，即 T 是连续的，则 $Tx_n\to Tx$. 因此由极限的唯一性得到 $Tx=y$. 由引理 6.10 知，T 是闭算子. □

在引理 6.11 中，条件"$\mathscr{D}(T)$是 X 中的闭集"是不可少的. 也就是说，当 $\mathscr{D}(T)$不是 X 中的闭集时，可以找到不是闭线性算子的有界线性算子的例子. 另外，也存在无界的闭线性算子.

例 1 设 X是赋范空间，若M是X中的稠密子空间且 $M\neq X$，则恒等算子 $I_M:M\to M\subset X$ 是有界线性算子. 但是，只要取 $x\in X\setminus M$和序列$\{x_n\}\subset\mathscr{D}(I_M)=M$，使得 $x_n\to x$，应用引理 6.10 便可知 $I_M:\mathscr{D}(I_M)\to X$ 不是闭算子.

例 2 考察微分算子$D:\mathscr{D}(D)\to C[0,1]$，这里$\mathscr{D}(D)=C^1[0,1]$是在$[0,1]$上具有连续的一阶导函数的函数的全体，它是$C[0,1]$的子空间. 对于每一个 $x\in\mathscr{D}(D)$

$$(Dx)(t)=x'(t)\left(=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right).$$

由第五章 § 4 例 5 知，D 是无界的线性算子. 下面，我们应用引理 6.10 证明D是闭算子.

事实上，取任意的 $x_n\in\mathscr{D}(D)\,(n\in\mathbb{N})$，使得 $x_n\to x$ 以及 $Tx_n=x_n'\to y$. 由于$C[0,1]$中元素列的收敛等价于$[0,1]$上函数列的一致收敛，因此在下面的运算过程中，极限符号与积分符号可以交换次序，即

$$\int_0^t y(s)\mathrm{d}s=\int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)ds=\lim_{n\to\infty}\int_0^t x_n'(s)\mathrm{d}s$$
$$=\lim_{n\to\infty}(x_n(t)-x_n(0))=x(t)-x(0).$$

于是得到

$$x(t)=x(0)+\int_0^t y(s)\mathrm{d}s.$$

这表明 $x\in\mathscr{D}(D)$ 且 $Dx=x'=y$. 因此由引理 6.10 知，T 是闭算子.

下面的闭图象定理给出了闭算子成为有界线性算子的条件. 在定理的证明中可以看到由 X 与 Y 的完备性可推出积空间 $X\times Y$ 的完备性.

定理 6.12（闭图象定理） 设 X 和 Y 是 Banach 空间，T: $\mathscr{D}(T)\to Y$ 是闭线性算子且 $\mathscr{D}(T)\subset X$. 若 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 中的闭集，则 T 是有界的.

证明 首先证明 $X\times Y$ 是完备的. 任取 Cauchy 序列 $\{z_n\}\subset X\times Y$, $z_n=(x_n, y_n)$，则对任意的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使得

(6.7) $\quad \|z_n-z_m\|=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|<\varepsilon \quad (n, m>N)$.

因此，$\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列，$\{y_n\}$ 是 Y 中的 Cauchy 序列. 由于 X 和 Y 的完备性，可设 $x_n\to x\in X$, $y_n\to y\in Y$. 令 $z=(x, y)$，则由 (6.7) 得 $(x_n, y_n)=z_n\to z=(x, y)$.

现在证明 T 有界. 由假设算子 T 的图象 $G(T)$ 是 $X\times Y$ 中的闭集，T 的定义域 $\mathscr{D}(T)$ 是 X 中的闭集，则 $G(T)$ 和 $\mathscr{D}(T)$ 都是完备的. 定义投影映射 $P: G(T)\to\mathscr{D}(T)$，使得对每一个 $(x, Tx)\in G(T)$

$$P(x, Tx)=x,$$

则 P 是线性的，并且 P 是有界的. 因为

$$\|P(x, Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x, Tx)\|.$$

显然，P 是满射. 并且当 $x_1=x_2$ 时必有 $Tx_1=Tx_2$，从而 (x_1, Tx_1)

$=(x_2, Tx_2)$，故 P 是双射. 于是 P 的逆映射 $P^{-1}: \mathscr{D}(T)\to G(T)$ 存在且

$$P^{-1}x=(x,Tx) \quad (x\in\mathscr{D}(T)).$$

由于 $\mathscr{D}(T)$ 和 $G(T)$ 都是完备的，由逆算子定理，P^{-1} 是有界的. 因此

$$\|P^{-1}x\|=\|(x,Tx)\|\leqslant\|P^{-1}\|\cdot\|x\| \quad (x\in\mathscr{D}(T)).$$

从而，对每一个 $x\in\mathscr{D}(T)$，

$$\|Tx\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|\leqslant\|P^{-1}\|\cdot\|x\|,$$

故 T 是有界的，且 $\|T\|\leqslant\|P^{-1}\|$. □

当 $\mathscr{D}(T)=X$ 时，$\mathscr{D}(T)$ 显然是 X 中的闭集. 这时由引理 6.11 知，线性算子 $T: X\to Y$ 是有界的可推导出 T 是闭算子. 而当 X 和 Y 是 Banach 空间时，由定理 6.12 知，T 是闭算子可推导出 T 是有界的. 这就得到下面的推论.

推论 6.13 设 X 和 Y 是 Banach 空间，$T: X\to Y$ 是线性算子，则 T 是闭算子当且仅当 T 是有界算子.

此推论常常被用来证明线性算子的有界性.

再考察例 2 中的微分算子 $D: \mathscr{D}(D)\to C[0,1]$. 由于 $C[0,1]$ 是 Banach 空间，D 是无界的闭算子，则由闭图象定理可知 $\mathscr{D}(D)$ 只能是 $C[0,1]$ 的稠密的真子空间，而不是闭的.

本节的几个定理都有广泛的应用. 下面，我们分别就逆算子定理与闭图象定理的应用各举一例. 逆算子定理对于微分方程及线性代数方程的求解问题，讨论解的连续依赖性等方面有很大的实用价值. 而闭图象定理常常可以用来验证算子的连续性，即先证明某一线性算子为闭算子，然后应用闭图象定理则可判断它是连续的.

例 3 （线性微分方程解的连续依赖性）考虑一个 n 阶非齐次线性常微分方程

(6.8) $a_n(t)x^{(n)}(t)+\cdots+a_0(t)x($ [illegible] $[a,b])$,

这里$a_k\in C[a,b]$，$x^{(k)}(t)$表示x的k阶导数 [illegible] $=0,1,\cdots,n)$. 设S表示方程(6.8)的初始条件

$$S: x(a)=x'(a)=\cdots=x^{(n-1)}(a)=0.$$

(或者边界条件

$$S: x(t_1)=\cdots=x(t_n)=0,\text{这里 } a=t_1<\cdots<t_n=b.)$$

常微分方程理论中的Picard定理指出：若对每一个$y\in C[a,b]$都存在唯一的解$x\in C^n[a,b]$，则此解$x(t)$是连续依赖于函数$y(t)$的.

现在我们来验证这一结论. $C^n[a,b]$表示$[a,b]$上所有n阶连续可微函数的全体，其中元素x的范数定义为

$$\|x\|_d=\sum_{k=0}^{n}\max_{a\leq t\leq b}|x^{(k)}(t)|.$$

易验证$(C^n[a,b],\|\cdot\|_d)$是Banach空间. 令

$$X=\{x\in C^n[a,b]\mid x\text{ 满足条件 }S\}.$$

易见X是$C^n[a,b]$的闭子空间，从而X也是完备的. $C[a,b]$(按范数$\|x\|=\max\limits_{a\leq t\leq b}|x(t)|$)是Ranach空间.

定义算子$T: X\to C[a,b]$，使得对每一个$x\in X$

$$Tx=a_nx^{(n)}+\cdots+a_0x.$$

则T是线性的. 方程(6.8)的解的存在及唯一的假设表明T是双射. 对每一个$x\in X$，容易得到

$$\|Tx\|\leq\left(\sum_{k=0}^{n}\|a_k\|\right)\|x\|_d,$$

故T是有界的. 应用逆算子定理，$T^{-1}: C[a,b]\to X$存在且连续. 因此当$[a,b]$上的连续函数$y(t)$有一微小变化时，相应的满足初始条件(或边界条件)S的解$x(t)$以及它的各阶导函数$x'(t),\cdots,x^{(n)}(t)$一致地有微小的变化. 在实际应用中，往往仅对$C[a,b]$的

某些特殊的函数(例如多项式)可以求出解．那末对于$y\in C[a,b]$，欲求对应的解 $x\in X$，可取多项式 P_n 使 $P_n\to y$，若 $x_n\in X$ 是 P_n 对应的解，则由上面的结论知，$x_n\to x$．

例 4 设$1<p,p'<\infty$，(α_{ij})是无穷矩阵且满足条件

(1) 对任意的 i 行，均有

$$\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^q<\infty \quad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

(2) 对任意的 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$，以

$$\eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}\xi_j \quad (i\in\mathrm{N})$$

为坐标的元素 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^{p'}$．

定义算子 T 使得

$$Tx=y \quad (x\in l^p)$$

那末 $T:l^p\to l^{p'}$ 是有界线性算子．

证明 显然 T 是线性的．要证 T 是连续的，由闭图象定理只要证明 T 是闭算子．设$\{x_n\}\subset l^p$，使

$$x_n\to x_0, Tx_n\to y.$$

记$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots)$，$Tx_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots)(n\in\mathrm{N})$，$x_0=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots)$，$y=(\eta_1,\ \eta_2,\cdots)$．由于 l^p 中点列的收敛可推出点列按坐标收敛．因此由 $Tx_n\to y$ 可得

$$\eta_i^{(n)}\to\eta_i \quad (n\to\infty,i\in\mathrm{N}). \tag{6.9}$$

另一方面，当令 $Tx_0=(\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},\cdots)$时，对每一个 $i\in\mathrm{N}$ 由 Hölder 不等式有

$$|\eta_i^{(n)}-\eta_i^{(0)}|=\left|\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_{ij}(\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(0)})\right|$$

$$\leqslant\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j^{(n)}-\xi_j^{(0)}|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{ij}|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}\|x_n-x_0\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

从而推出

(6.10) $$\eta_i^{(n)}\to\eta_i^{(0)}\quad(n\to\infty,i\in\mathrm{N}).$$

由极限的唯一性及(6.9)与(6.10)，则得 $\eta_i=\eta_i^{(0)}(i\in\mathrm{N})$，即 $y=Tx_0$. 由引理 6.10 知，T 是闭算子. □

习 题

1. 证明引理 6.3.

2. 设X和Y是赋范空间，T: $\mathscr{D}(T)\to Y$ 是闭线性算子且 $\mathscr{D}(T)\subset X$. 若 T^{-1} 存在，则 T^{-1} 也是闭线性算子.

3. 设X和Y是赋范空间，T: $X\to Y$ 是闭线性算子. 若A是X中的紧子集，则A的象 $T(A)$是Y中的闭集.

4. 设X是赋范空间，Y是 Banach 空间，T: $\mathscr{D}(T)\to Y$ 是有界线性算子且$\mathscr{D}(T)\subset X$. 若T是闭算子，则$\mathscr{D}(T)$是 X 中的闭集.

5. 设X和Y是赋范空间，T: $X\to Y$ 是闭线性算子. 证明T的零空间 $\mathscr{N}(T)$是X中的闭子空间.

第七章 内积空间和 Hilbert空间

内积空间是一类特殊的赋范线性空间. 由于内积空间中具有二元素正交的概念，因此内积空间与赋范线性空间相比具有更多的类似于欧氏空间的特征. 在欧氏空间中一些重要的几何特征可类似地在内积空间和 Hilbert 空间中建立起来. 在这一章中，还将介绍 Hilbert 空间上的有界线性泛函的 Riesz 表示定理，伴随算子以及双线性泛函中的 Lax-Milgram 定理. 它们在内积空间和 Hilbert 空间的理论和应用中有重要的作用.

§1 内积空间和Hilbert 空间的定义

我们把平面上，即二维欧氏空间中，向量的长度的概念以及向量的长度所满足的基本性质加以抽象，使之成为一般线性空间中元素的范数以及定义范数所必须满足的范数公理. 这样，我们得到了赋范线性空间. 于是二维欧氏空间作为赋范线性空间的模型，表明该空间中向量的范数就是向量的长度. 然而，在二维欧氏空间中还有一个基本概念，即二向量的夹角以及由此导出的二向量的正交，未能反映在赋范线性空间的结构中. 换句话说，在一般赋范线性空间中可能没有二元素正交的概念. 因此，在本节中我们将定义一个空间，使得在该空间中既有元素的范数又有二元素的正交概念. 可以设想这样的空间将具有更多类似于欧氏空间的几何特征. 我们知道，在二维欧氏空间中二向量 a 与 b 的点积为

$$a\cdot b=|a|\cdot|b|\cdot\cos\alpha,$$

这里 $|a|$ 和 $|b|$ 分别表示 a 和 b 的长度，α 表示 a 与 b 的夹角. 因此，任一向量 a 的长度都可用点积表示为 $|a|=\sqrt{a\cdot a}$；同时二向量

a 与 b 的夹角 α 可由下式确定:

$$\cos\alpha=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}\qquad(a\neq 0,b\neq 0).$$

当点积 $a\cdot b=0$ 时,表明 a 与 b 正交. 由此可见,定义了点积的欧氏空间正是我们所要寻求的空间的模型. 那末下面的任务就是提取哪些基本性质作为我们定义这一类空间必须满足的公理.

定义 1.1 设 X 是数域 $\mathbf{K}$($\mathbf{K}$ 为实数域或复数域)上的线性空间. 若映射 $(\cdot,\cdot)$: $X\times X\to\mathbf{K}$, 对任意的 $x, y, z\in X$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$,满足如下内积公理:

(I 1) 对第一变元线性 $(\alpha x+\beta y, z)=\alpha(x, z)+\beta(y,z)$;

(I2) 共轭对称性 $(x, y)=\overline{(y,x)}$;

(I3) 非负性 $(x,x)\geqslant 0$,并且

$(x,x)=0$ 当且仅当 $x=\theta$,

则 $(\cdot,\cdot)$ 称为 X 上的内积(inner product), $(X,(\cdot,\cdot))$ 称为内积空间(inner product space),通常简记为 X. 对于给定的 $x,y\in X$, (x,y) 称为 x 与 y 的内积.

当数域 $\mathbf{K}$ 为复数域 $\mathbf{C}$ 时,内积空间 X 称为复内积空间. (为使我们的讨论具有一般性,在没有事先声明的情况下,我们总是假定所讨论的内积空间是复内积空间.) 当数域 $\mathbf{K}$ 为实数域 $\mathbf{R}$ 时,内积空间 X 称为实内积空间. 这时,内积公理(I 2) 成为 $(x, y)=(y, x)$,即实内积空间中内积的对称性.

由定义可以立即得到下面的性质.

(1) 内积对于第二变元具有共轭线性,即对任意 $x, y, z\in X$ 以及 $\alpha,\beta\in\mathbf{K}$ 有

$$(x,\alpha y+\beta z)=\bar{\alpha}(x,y)+\bar{\beta}(x,z).$$

(2) 当 $x=\theta$ 或 $y=\theta$ 时, $(x,y)=0$.

引理 1.2 设X是内积空间，则对任意 $x,y\in X$

$$|(x,y)|\leqslant\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \tag{1.1}$$

(上式称为 Schwarz 不等式．)

证明 当 $y=\theta$ 时，不等式(1.1)显然成立．现设 $y\neq\theta$．对于任意的数 α，由内积的非负性

$$\begin{aligned}0&\leqslant(x-\alpha y,x-\alpha y)=(x,x)-\bar{\alpha}(x,y)-\alpha(y,x)+\alpha\bar{\alpha}(y,y)\\&=(x,x)-\bar{\alpha}(x,y)-\alpha[(y,x)-\bar{\alpha}(y,y)].\end{aligned}$$

为使上式中方括号内的表达式为零，令 $\bar{\alpha}=\dfrac{(y,x)}{(y,y)}$ 则上面的不等式化为

$$0\leqslant(x,x)-\frac{(y,x)}{(y,y)}(x,y)=(x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}.$$

由此式立即得到不等式(1.1)． □

定理 1.3 设X是内积空间．对于每一个 $x\in X$，令

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}, \tag{1.2}$$

则$\|\cdot\|$是X上的范数(称为由内积导出的范数)，在此范数下X成为一个赋范空间．

证明 主要验证三角不等式$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$成立．由于

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\&=(x,x)+2\mathrm{Re}(x,y)+(y,y),\end{aligned}$$

式中$\mathrm{Re}(x,y)$表示(x,y)的实部．由 Schwarz 不等式

$$\mathrm{Re}(x,y)\leqslant|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

因此，

$$\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2.$$

开平方，则三角不等式得证．其它范数公理显然满足．故$\|\cdot\|$确是X上的范数． □

根据(1.2),由内积空间$(X,(\cdot,\cdot))$上的内积可导出X上的范数$\|\cdot\|$,使得$(X,\|\cdot\|)$成为赋范线性空间. 而由所导出的这个范数又可导出X上的度量

$$d(x,y)=\|x-y\| \qquad (x,y\in X),$$

使得(X,d)成为度量空间，这个度量d称为由X上的内积导出的度量.

定义1.4 若内积空间X在内积导出的范数下是完备的赋范空间,则X称为Hilbert空间(Hilbert space). 简言之,Hilbert空间就是完备的内积空间.

在内积空间中，我们把点列的收敛看作是在内积导出的范数的意义下的收敛. 关于内积的连续性，我们可以从下面的引理得到.

引理 1.5 设X是内积空间,$x_n,y_n\in X(n\in\mathbb{N})$. 若$x_n\to x$且$y_n\to y$,则$(x_n,y_n)\to(x,y)$.

证明 由三角不等式及Schwarz不等式,有

$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)|&\leqslant|(x_n,y_n)-(x,y_n)|+|(x,y_n)-(x,y)|\\&=|(x_n-x,y_n)|+|(x,y_n-y)|\\&\leqslant\|x_n-x\|\|y_n\|+\|x\|\|y_n-y\|.\end{aligned}$$

由于$y_n\to y$,则$\{\|y_n\|\}$是有界的. 又由条件$x_n\to x$且$y_n\to y$,则$\|x_n-x\|\to0$且$\|y_n-y\|\to0$. 因此

$$|(x_n,y_n)-(x,y)|\to0. \qquad \square$$

由定理1.3知,每一个内积空间$(X,(\cdot,\cdot))$可以由内积导出范数$\|\cdot\|$,使得$(X,\|\cdot\|)$成为一个赋范空间. 反过来,是否每一个赋范空间$(X,\|\cdot\|)$都能找到一个X上的内积,使得由此内积导出的范数与原来空间的范数相同?回答是否定的. 由下面的引理可知,由内积导出的范数必须满足平行四边形公式.

引理 1.6 设X是内积空间,$\|\cdot\|$是由内积导出的范数,则对于

任意 $x,y\in X$

(1. 3) $$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2).$$

(上式称为平行四边形公式.)

证明 可由直接的验证得到(1. 3)式. □

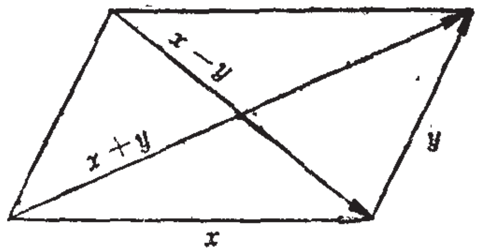


图 1.1

从图 1. 1 中可以看出,公式(1. 3)是平面几何中“平行四边形中四条边长的平方和等于两条对角线的平方和”这一平行四边形公式在内积空间中的推广,故也称为平行四边形公式.

由引理 1. 6 得知,若赋范空间 X 上的范数不满足平行四边形公式,则 X 上不存在这样的内积使得由此内积导出的范数就是 X 上的范数. 换句话说,不满足平行四边形公式的赋范空间不是内积空间(见下面的例 4 和例 5). 可以证明:若赋范空间 X 上的范数对于任意 $x,y\in X$ 都满足平行四边形公式,则可以在 X 上定义一个内积使得 X 的范数是由此内积导出的范数.

对于任何一个内积空间 X,它的内积可以用由内积导出的范数来表示,即对任意 $x,y\in X$,当 X 是实内积空间时,

(1. 4) $$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2);$$

当 X 是复内积空间时,

(1.5) $$(x,\ y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2).$$

等式(1.4)和(1.5)常称为极化恒等式(polarization identity). 读者可以通过直接计算来验证.

下面举一些例子.

例1 $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$. 对于任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{C}^n$, $y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{C}^n$,定义

$$(x,y)=\xi_1\bar{\eta}_1+\xi_2\bar{\eta}_2+\cdots+\xi_n\bar{\eta}_n, \tag{1.6}$$

则不难验证 $\mathbf{C}^n$ 按(1.6)定义的内积成为内积空间.

对于任意 $x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n, y=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in\mathbf{R}^n$,定义

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\cdots+\xi_n\eta_n, \tag{1.7}$$

则同样可验证 $\mathbf{R}^n$ 按(1.7)定义的内积成为内积空间.

按(1.6)和(1.7)定义的内积导出的范数都具有如下形式

$$\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}=(|\xi_1|^2+|\xi_2|^2+\cdots+|\xi_n|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, $\mathbf{R}^n$ 和 $\mathbf{C}^n$ 都是 Hilbert 空间.

例2 l^2. 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2, y=(\eta_1,\ \eta_2,\cdots)\in l^2$,定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i, \tag{1.8}$$

则 l^2 按(1.8)定义的内积成为内积空间. 由内积导出的范数

$$\|x\|=\sqrt{(x,\ x)}=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

因此, l^2 是 Hilbert 空间.

例3 $L^2[a,b]$. 对于任意 $x,y\in L^2[a,b]$,定义

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\overline{y(t)}dt, \tag{1.9}$$

易知 $L^2[a,b]$按 (1.9) 定义的内积成为内积空间. 由内积导出的范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.10}$$

因此, $L^2[a,b]$是 Hilbert 空间.

例 4 $l^p(1\leqslant p<\infty, p\neq 2)$. 对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^p$, 其范数为

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

则 l^p 不能成为内积空间.

事实上,取 $x_0=(1,1,0,0,\cdots)$, $y_0=(1,-1,0,0\cdots)$, 则 $x_0,y_0\in l^p$ 且 $\|x_0\|=\|y_0\|=2^{\frac{1}{p}}$, 但 $\|x_0+y_0\|=\|x_0-y_0\|=2$. 可见对此 x_0 和 y_0 平行四边形公式(1.3)不成立. 这说明 $l^p(1\leqslant p<\infty, p\neq 2)$ 中的范数不能由内积导出. 因此 $l^p(1\leqslant p<\infty,\ p\neq 2)$ 不能成为内积空间.

例 5 $C[a,b]$. 对于任意 $x\in C[a,b]$, 其范数为

$$\|x\|=\max_{t\in[a,b]}|x(t)|, \tag{1.11}$$

则 $C[a,b]$ 不能成为内积空间.

事实上,对于 $t\in[a,b]$, 令 $x_0(t)=1$, $y_0(t)=\frac{t-a}{b-a}$, 则 $x_0,\ y_0\in C[a,b]$ 且 $\|x_0\|=\|y_0\|=1$, 但由于

$$x_0(t)+y_0(t)=1+\frac{t-a}{b-a},$$

$$x_0(t)-y_0(t)=1-\frac{t-a}{b-a},$$

我们得到 $\|x_0+y_0\|=2$, $\|x_0-y_0\|=1$(见图1.2). 可见,对此 x_0 和 y_0 平行四边形公式(1.3)不成立. 因此 $C[a,b]$ 按照(1.11)定义的范数不能成为内积空间.

然而,如果 $C[a,b]$ 按照(1.10)定义的范数,那末它可以成为内积空间. 这时 $C[a,b]$ 中二元素 x 与 y 的内积由(1.9)给出. 此内积空间不是 Hilbert 空间,因为 $C[a,b]$ 按照(1.10) 定义的范数是不完备的.

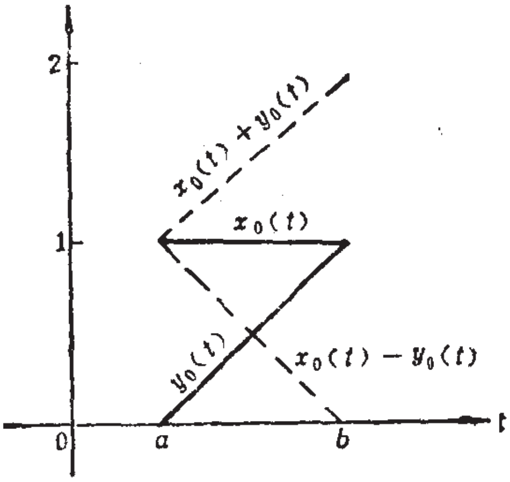


图 1.2

由于赋范线性空间是由线性运算和范数决定的，我们可以把两个等距同构的赋范线性空间看作是同一的，即把它们的线性运算和范数看作是同一的．而内积空间又是由线性运算和内积决定的，自然内积空间的同构应有如下的定义．

定义1.7 设 X 和 Y 是内积空间，T: $X \to Y$ 是双射．若对于任意 $x, y \in X$ 以及任意的数 α, β，满足

(1) T 是线性算子，即 $T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty$，

(2) T 保持内积，即 $(Tx, Ty)=(x, y)$，

则 T 称为 X 到 Y 上的同构映射(isomorphism)．

若存在一个从内积空间 X 到内积空间 Y 上的同构映射，则内积空间 X 和 Y 称为是同构的(isomorphic)．

按此定义，在同构的意义下，我们可以把两个同构的内积空间看作是同一的．容易看出：若映射 T: $X \to Y$ 保持内积，则 T 保持(由内积导出的)范数．因此两个同构的内积空间，在它们的内积导出的范数下，作为赋范线性空间是等距同构的．

设X是内积空间，Y是X的线性子空间. 按照X中的内积在$Y\times Y$上的限制可定义Y中的内积，于是Y也是一个内积空间. 我们称Y为内积空间X的子空间. 例如由例3知，$L^2[a,b]$是Hilbert空间，而$C[a,b]$是$L^2[a,b]$的线性子空间，因此按照$L^2[a,b]$中的内积$C[a,b]$是$L^2[a,b]$的子空间.

习　题

1. 验证极化恒等式(1.5).
2. 对于任意$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots)\in l^2$，定义

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_i.$$

验证按此定义的$(\cdot,\cdot)$是l^2上的内积，从而l^2成为内积空间.

3. 设$\{x_n\}$是内积空间X中的点列，$x\in X$. 证明：若$(x_n,x)\to(x,x)$且$\|x_n\|\to\|x\|$，则$x_n\to x$.
4. 设Y是Hilbert空间X的子空间，则Y是完备的当且仅当Y是X中的闭集.

§2　正交性

我们熟知的$\mathbf{R}^2$空间按照上节例1中定义的内积是一个内积空间，并且$\mathbf{R}^2$中任意二向量x和y的内积还可以表示为

$$(x,y)=|x|\cdot|y|\cdot\cos\alpha,$$

这里$|x|=\|x\|$，$|y|=\|y\|$，α为x与y的夹角. 若$(x,y)=0$且$x\neq\theta$，$y\neq\theta$时，则x与y的夹角$\alpha=\frac{\pi}{2}$，即x与y正交. 将此概念推

广到一般的内积空间中，就可以将欧氏空间中一些重要的几何特征类似地在内积空间和 Hilbert 空间中建立起来.

定义 2.1 设 X 是内积空间, $x,y\in X$. 若 $(x,y)=0$, 则称 x 与 y 是正交的或直交的(orthogonal), 记为 $x\perp y$.

设 $A,B\subset X$. 若对于每一个 $x\in A$ 和每一个 $y\in B$ 都有 $x\perp y$, 则称 A 与 B 是正交的或直交的, 记为 $A\perp B$. 特别地, $\{x\}\perp B$ 记为 $x\perp B$.

设 $A\subset X$. 令

$$A^{\perp}=\{x\in X\mid x\perp A\},$$

我们称 $A^{\perp}$ 为 A 的正交补或直交补 (orthogonal complement).

由定义, 显然零元素 θ 与 X 中任意元素正交. 我们还可以得到如下性质.

引理 2.2 设 X 是内积空间, $x,y\in X$, $A\subset X$, 则下面的结论成立.

(1) 若 $x\perp y$, 则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$(勾股定理).

(2) $A\cap A^{\perp}\subset\{\theta\}$; 若 A 是 X 的子空间, 则 $A\cap A^{\perp}=\{\theta\}$.

(3) $A^{\perp}$ 是 X 的闭子空间.

(4) 若 A 在 X 中稠密, 则 $A^{\perp}=\{\theta\}$.

证明 (1) 由于 $(x,y)=0$, 可得 $(y,x)=\overline{(x,y)}=0$, 则

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)\\&=\|x\|^2+\|y\|^2.\end{aligned}$$

(2) 若 $x\in A\cap A^{\perp}$, 则 $x\perp x$, 于是 $(x,x)=0$, 故 $x=\theta$. 因此, $A\cap A^{\perp}\subset\{\theta\}$. 若 A 是 X 的子空间, 则 $\theta\in A$. 同时又有 $\theta\in A^{\perp}$, 故 $A\cap A^{\perp}=\{\theta\}$.

(3) 先证 $A^{\perp}$ 是 X 的子空间. 对于任意 $x,y\in A^{\perp}$ 以及任意的数 α,β, 因为对每一个 $a\in A$ 都有

$$(\alpha x+\beta y,a)=\alpha(x,a)+\beta(y,a)=0,$$

所以 $\alpha x+\beta y\perp A$, 即 $\alpha x+\beta y\in A^{\perp}$.

现在证明 $A^\perp$是X的闭集. 为此只要证明$\overline{A^\perp}\subset A^\perp$. 对于任意$x\in\overline{A^\perp}$,则存在 $x_n\in A^\perp(n\in\mathrm{N})$, 使得 $x_n\to x$. 由于内积的连续性(引理1.5),则对于每一个 $a\in A$ 有

$$(x,a)=(\lim_{n\to\infty}x_n,a)=\lim_{n\to\infty}(x_n,a)=0,$$

于是 $x\perp A$,即 $x\in A^\perp$.

(4) 对于任意 $x\in A^\perp$,要证明 $x=\theta$. 由于 $x\in A^\perp\subset X=\bar{A}$,则存在 $x_n\in A(n\in\mathrm{N})$,使得 $x_n\to x$. 由内积的连续性,我们得到

$$(x,x)=(\lim_{n\to\infty}x_n,x)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x)=0,$$

故 $x=\theta$. □

在度量空间X中, 设 $x\in X$, $\varnothing\neq M\subset X$, x与 M的距离 $\delta=d(x,M)$定义为

$$\delta=\inf_{y\in M}d(x,y).$$

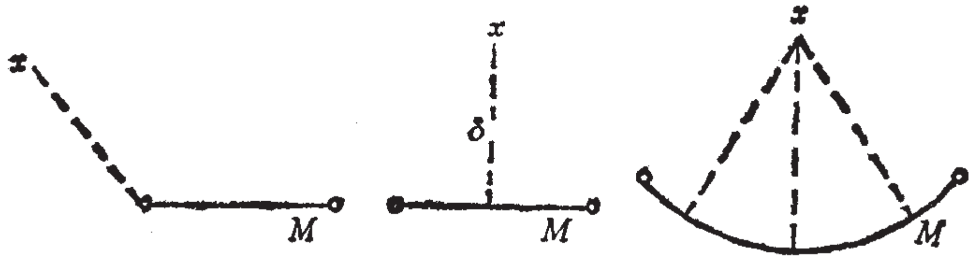
若X是赋范空间,则上式变为

$$\delta=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

在理论和实际应用中, 尤其关心如下问题的解答: 是否存在 $y_0\in M$,使得

$$\delta=\|x-y_0\|;$$

这样的 y_0,如果存在,是否唯一?如果不对M加上一些附加条件,即使在二维欧氏空间 R^2 中, 对这个问题的回答也是不肯定的. 如图 2.1所示,如果 $M\subset\mathrm{R}^2$ 在图 2.1(a)和(b)中为开线段, 在(c)中为开圆弧段,容易看到上面的问题中的 y_0,在(a)中不存在; 在(b)中存在且唯一;在(c) 中存在无穷多个. 但是,当M是内积空间中完备的凸集时,上面关于 y_0 的存在唯一问题有肯定的回答. 这就是称之为"变分引理"或"极小化向量定理"的一个重要定理. 为此,我们先回顾凸集的概念(见第六章定义 1.6).



(a)　　(b)　　(c)

图 2.1

设X是线性空间，$M\subset X$. 若对于任意$x,y\in M$，联结x和y的线段

$$\{\alpha x+(1-\alpha)y\mid 0\leqslant\alpha\leqslant 1\}$$

包含在M中，则M称为X中的凸集. 由定义，显然线性空间的每一个线性子空间是凸集，赋范空间中的每一个开球也是凸集.

定理 2.3 (变分引理)　设X是内积空间，M是X中非空的凸集，并且M按X中(由内积导出)的度量是完备的，则对于每一个$x\in X$存在唯一的$y_0\in M$，使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M).$$

证明　存在性. 令$\delta=d(x,\ M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$. 由下确界的定义，在$M$中存在点列$\{y_n\}$，使得

$$\|x-y_n\|\to\delta(n\to\infty). \tag{2.1}$$

我们证明$\{y_n\}$是 Cauchy 序列. 由平行四边形公式

$$\|y_n-y_m\|^2=2\|y_n-x\|^2+2\|y_m-x\|^2-\|y_n+y_m-2x\|^2. \tag{2.2}$$

由于M是凸的，则$\frac{y_n+y_m}{2}\in M$，并且

$$\|y_n+y_m-2x\|^2=4\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\right\|^2\geqslant 4\delta^2.$$

代入(2.2)式，当$m,n\to\infty$时，得到

$$\|y_n-y_m\|^2\leqslant 2(\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2)-4\delta^2\to 0.$$

因此$\{y_n\}$是Cauchy序列. 由于M是完备的，可设$y_n\to y_0\in M$. 于是由(2.1)得到

$$\|x-y_0\|=\|x-\lim_{n\to\infty}y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=\delta.$$

唯一性. 若又存在$y_1\in M$，使得$\|x-y_1\|=\delta$，则序列$\{y_0, y_1, y_0, y_1, \cdots\}$也是一个满足(2.1)的序列. 用上面同样的方法可证明它是Cauchy序列，应用M的完备性必然有$y_0=y_1$. □

由于内积空间X的线性子空间是X中的凸集，所以此定理有如下推论.

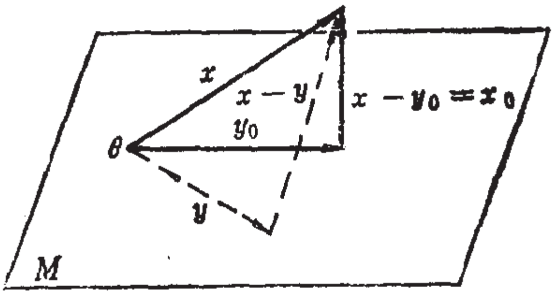


图 2.2

推论 2.4 设X是内积空间，M是X的完备子空间，则对于每一个$x\in X$存在唯一的$y_0\in M$，使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M).$$

定理2.3(变分引理)是内积空间的一个基本定理，它在微分方程、现代控制论和逼近理论等方面有着重要的应用.下面，我们将寻求定理中的y_0与x的关系，由此得到投影和正交分解的概念以及有关的定理. 为了得到一个直观的认识，设$X=\mathbf{R}^3$，M是$\mathbf{R}^3$中包含零元素θ的平面（因而是$\mathbf{R}^3$的完备子空间）. 在图2.2中可以看到，定理2.3（或推论2.4)中的y_0正是向量x在平面M上的投影，因为这时向量$x-y_0$(记$x_0=x-y_0$)的长$\|x-y_0\|$是诸向量$x-y(y\in M)$的长$\|x-y\|$中的最小者. 所以$\|x-y_0\|=d(x,M)$. 并且从几何上的投影关系可知$x-y_0\perp M$. 这一性质在一般的内积空间中也成立，这就是下面的引理2.5. 这样，$\mathbf{R}^3$中的每一个向量x可以表示为一个唯一的形式$x=y_0+x_0$，称为x的正交分解，其中$y_0\in M$是x的投影，$x_0=x-y_0\in M^{\perp}$. 这些概念都可以推广到内积空间和Hilbert空间中去，并且类似的结论可以在内积空间和Hilbert空间中建立起来.

引理 2.5 设X是内积空间，M是X的线性子空间，$x\in X$是一

给定点. 若存在 $y_0\in M$ 使得 $\|x-y_0\|=d(x,M)$, 则 $x-y_0\perp M$.

证明 令 $x_0=x-y_0$. 任取 $z\in M$, $z\neq\theta$, 则对任何数 α, 有 $y_0+\alpha z\in M$. 因此

$$(d(x,M))^2\leqslant\|x-(y_0+\alpha z)\|^2=(x_0-\alpha z,x_0-\alpha z)$$
$$=\|x_0\|^2-\bar{\alpha}(x_0,z)-\alpha(z,x_0)+\alpha\bar{\alpha}\|z\|^2.$$

由条件 $\|x_0\|=d(x,M)$, 上式化为

$$\bar{\alpha}(x_0,z)+\alpha[(z,x_0)-\bar{\alpha}\|z\|^2]\leqslant 0$$

为使方括号内的项为零, 令

$$\bar{\alpha}=\frac{(z,x_0)}{\|z\|^2}.$$

于是我们得到

$$\frac{(z,x_0)}{\|z\|^2}(x_0,z)=\frac{|(x_0,z)|^2}{\|z\|^2}\leqslant 0.$$

因此上式必然等于零, 从而 $(x_0,z)=0$. 故 $x-y_0\perp M$ □

定义 2.6 设 X 是线性空间, Y 和 Z 是 X 的线性子空间. 若对于每一个 $x\in X$, 存在唯一的 $y\in Y$ 和 $z\in Z$, 使得 $x=y+z$, 则称 X 是 Y 和 Z 的直接和(direct sum), 记为 $X=Y\oplus Z$.

容易看出, $X=Y\oplus Z$ 等价于如下的条件(1) 与(2)同时成立: (1)对于每一个 $x\in X$, 存在 $y\in Y$ 和 $z\in Z$, 使得 $x=y+z$; (2) $Y\cap Z=\{\theta\}$. 这时, Y 中的每一个非零元素与 Z 中的每一个非零元素是线性无关的. 在内积空间中, 我们更多地考虑当 Y 与 Z 正交时的情况.

定义 2.7 设 X 是内积空间, M 是 X 的线性子空间, $x\in X$. 若存在 $y_0\in M$ 和 $x_0\in M^\perp$, 使得

$$x=y_0+x_0, \tag{2.3}$$

则称 y_0 是 x 在 M 上的(正交)投影(projection), (2.3)式称为 x 的正交分解(orthogonal decomposition).

由此定义可知, 若 y_0 是 x 在 M 上的投影, 则 $x_0=x-y_0\in M^\perp$.

必须注意，当X是内积空间时，并不能保证每一个X中元素x的投影存在.（下面，我们在定理2.9和推论2.10中给出了使每一个X中元素的投影存在的充分条件.）但是可以断言，若x在M上的投影y_0存在，则此投影必定是唯一的.

引理2.8 设X是内积空间，M是X的线性子空间. 对于$x\in X$，若x在M上的投影y_0存在，则$y_0\in M$是唯一的，且

$$\|x-y_0\|=d(x,M).$$

证明 假若y_0和y_0'都是x在M上的投影，由定义2.7知，$y_0\in M$，$y_0'\in M$且$x-y_0\in M^{\perp}$，$x-y_0'\in M^{\perp}$，从而$y_0-y_0'\in M$且$(x-y_0')-(x-y_0)=y_0-y_0'\in M^{\perp}$，则由引理2.2(2)得$y_0-y_0'=\theta$，即$y_0=y_0'$. 于是投影的唯一性得证.

由于$y_0\in M$，$x-y_0\perp M$，对任意$y\in M$，

$$x-y=(x-y_0)+(y_0-y),$$

而$y_0-y\in M$，因此$x-y_0\perp y_0-y$. 由勾股定理(引理2.2(1))，

$$\|x-y\|^2=\|x-y_0\|^2+\|y_0-y\|^2\geqslant\|x-y_0\|^2.$$

所以$d(x,M)=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|\geqslant\|x-y_0\|$. 由于$y_0\in M$，又有$d(x,M)\leqslant\|x-y_0\|$. 故$\|x-y_0\|=d(x,M)$. □

引理2.8表明，用M中的点来逼近X中的点x时，若x在M上的投影y_0存在，则当M中的点等于y_0时逼近程度最佳. 下面的定理指出，在什么条件下，对于每一个$x\in X$，x在M上的投影存在.

定理2.9 设X是内积空间，M是X的完备的线性子空间，则对于每一个$x\in X$，x在M上的投影唯一地存在，即存在$y_0\in M$，$x_0\in M^{\perp}$，使得

$$x=y_0+x_0,$$

而且由引理2.8，这种分解是唯一的且$\|x-y_0\|=\|x_0\|=d(x,M)$.

证明 由推论2.4知，对于每一个$x\in X$存在唯一的$y_0\in M$，

使得$\|x-y_0\|=d(x, M)$. 再用引理 2.5 可得 $x-y_0\perp M$. 令 $x_0=x-y_0$, 则 $x_0\in M^\perp$ 且 $x=y_0+x_0$. $\square$

推论 2.10 设H是 Hilbert 空间, M 是H的闭子空间, 则

$$H=M\oplus M^\perp.$$

推论 2.11 设H是 Hilbert 空间. M 是H的闭子空间, 则 $M=M^{\perp\perp}$. 特别地, 若 $M^\perp=\{\theta\}$, 则 $M=H$.

证明 当M为H中任一集时, 对任意的 $x\in M$ 显然有 $x\in M^{\perp\perp}$. 因此 $M\subset M^{\perp\perp}$.

为证明相反的包含关系, 任取 $x\in M^{\perp\perp}$. 由假设 M 是H的闭子空间, 应用推论 2.10, 我们得到 $x=y_0+x_0$, 这里 $y_0\in M, x_0=x-y_0\in M^\perp$. 注意到 $y_0\in M\subset M^{\perp\perp}$ 以及所取的 $x\in M^{\perp\perp}$, 我们又得到 $x_0=x-y_0\in M^{\perp\perp}$. 因此, 由引理 2.2(2)必有 $x_0=x-y_0=\theta$, 从而 $x=y_0\in M$. 这就证明了 $M^{\perp\perp}\subset M$. 所以 $M=M^{\perp\perp}$. $\square$

由引理 2.2(3)可知, 推论 2.11 的逆命题也是成立的. 就是说: 对于 Hilbert 空间H中的集 M, 若 $M=M^{\perp\perp}$, 则 M 是H的闭子空间.

在本节的末尾, 我们举例说明定理 2.9 在逼近理论中的应用.

设X 是赋范空间, M 是X的子空间. 对于 $x\in X$, 若存在 $y_0\in M$, 使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M)\left(=\inf_{y\in M}\|x-y\|\right),$$

则 y_0 称为 x 在 M 中的最佳逼近(best approximation). 当X是内积空间时, 由定理 2.9 知, 若 M 是X的完备子空间, 则对于每一个 $x\in X$ 存在唯一的 x 在 M 中的最佳逼近 y_0. 实际上, y_0 就是 x 在 M 中的投影.

举两个实际问题的例子.

例 1 设有 $n+1$ 个变量 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n$, 在$m$次观察中每次

得到的观察值是$(x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \cdots, x_n^{(j)})$ $(j=1, \cdots, m)$. 现在的问题是:求一组数$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$, 使得用$x_1, \cdots, x_n$的线性组合$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$来近似表达$x_0$时,如下的平方和误差达到最小,即

$$\sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i^{(j)}\right)^2 = \inf_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n} \sum_{j=1}^{m}\left(x_0^{(j)} - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^{(j)}\right)^2.$$

例 2 设区间$[a,b]$上的函数$y_0, y_1, y_2, \cdots y_n$定义为

$$y_j(t) = t^j \qquad t\in[a,b] \quad (j=0,1,\cdots,n).$$

对于给定的$f\in L^2[a,b]$, 现在的问题是: 求f在$\mathrm{span}\{y_0, y_1, \cdots, y_n\}$中的最佳逼近$y_0 = \sum_{j=0}^{n}\alpha_j y_j$,即求一组数$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$使

$$\left\| f - \sum_{j=0}^{n}\alpha_j y_j \right\| = \inf_{\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left\| f - \sum_{j=0}^{n}\lambda_j y_j \right\|$$

(这里的范数是$L^2[a,b]$空间的范数),也就是

$$\left(\int_a^b \left| f(t) - \sum_{j=0}^{n}\alpha_j t^j \right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \inf_{\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n}\left(\int_a^b \left| f(t) - \sum_{j=0}^{n}\lambda_j t^j \right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

或者说, $\left\| f - y_0 \right\| = \left\| f - \sum_{j=0}^{n}\alpha_j y_j \right\| = d(f, M).$

一般来讲,上面的两个例子提出了这样一类最佳逼近问题. 设X是内积空间, M是X的有限维子空间($\dim M = n$),因而M是完备的. 设$\{y_1, \cdots, y_n\}$是M的一个基. 对于给定的$x\in X$, 由定理2.9,存在唯一的$y_0\in M$,使得

$$x = y_0 + x_0,$$

这里$x_0 = x - y_0 \in M^{\perp}$,并且$\|x_0\| = \|x - y_0\| = d(x, M)$. 因此$y_0$就是

x 在 M 中的最佳逼近. 下面,我们讨论如何求出 y_0 来.

设 y_0 在基 $\{y_1,\cdots,y_n\}$ 下的表示式为

$$y_0=\alpha_1^{(0)}y_1+\alpha_2^{(0)}y_2+\cdots+\alpha_n^{(0)}y_n.$$

于是,我们的任务是如何求出这一组数 $\alpha_1^{(0)},\alpha_2^{(0)},\cdots,\alpha_n^{(0)}$,使得

$$\|x-y_0\|=d(x,M).$$

由于 $x-y_0\perp M$,因此对每一个 $j=1,\cdots,n$,

$$(y_j,x-y_0)=\left(y_j,\ x-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^{(0)}y_k\right)=0.$$

由此我们得到一个线性方程组

$$\begin{cases}(y_1,x)-\overline{\alpha_1^{(0)}}(y_1,y_1)-\cdots-\overline{\alpha_n^{(0)}}(y_1,y_n)=0\\(y_2,x)-\overline{\alpha_1^{(0)}}(y_2,y_1)-\cdots-\overline{\alpha_n^{(0)}}(y_2,y_n)=0\\\cdots\cdots\\(y_n,x)-\overline{\alpha_1^{(0)}}(y_n,y_1)-\cdots-\overline{\alpha_n^{(0)}}(y_n,y_n)=0\end{cases}$$

由于 y_0 存在且唯一,从而线性方程组的解 $\overline{\alpha_1^{(0)}},\ \overline{\alpha_2^{(0)}},\cdots,\overline{\alpha_n^{(0)}}$ 存在且唯一,因此线性方程组的 Gram 行列式

$$G(y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}(y_1,y_1) & (y_1,y_2) & \cdots & (y_1,y_n)\\(y_2,y_1) & (y_2,y_2) & \cdots & (y_2,y_n)\\ & \cdots\cdots & & \\(y_n,y_1) & (y_n,y_2) & \cdots & (y_n,y_n)\end{vmatrix}\neq 0,$$

并且

$$\alpha_j^{(0)}=\frac{\overline{G}_j}{\overline{G}(y_1,\cdots,y_n)}\qquad(j=1,\cdots,n),$$

其中,G_j 是行列式 $G(y_1,\cdots,y_n)$ 中第 j 列元素换为如下一列元素:$(y_1,x),(y_2,x),\cdots,(y_n,x)$,而得到的行列式,$\overline{G}$ 和 $\overline{G}_j$ 分别是 G 和 G_j 的复共轭.

可以证明:x 与它的最佳逼近 y_0 的距离 $\|x-y_0\|$ 能够表示为

$$\|x-y_0\|^2=\frac{G(x,y_1,\cdots,y_n)}{G(y_1,\cdots,y_n)},$$

这里

$$G(x,y_1,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}(x,x) & (x,y_1) & \cdots & (x,y_n)\\(y_1,x) & (y_1,y_1) & \cdots & (y_1,y_n)\\ \cdots\cdots & & & \\(y_n,x) & (y_n,y_1) & \cdots & (y_n,y_n)\end{vmatrix}$$

具体的推证过程可参见文献[10].

习　　题

1. 设M和N是内积空间X的子集. 证明:

(1) 若$M\subset N$,则$N^{\perp}\subset M^{\perp}$;

(2) 若$x\perp M$,则$x\perp \overline{M}$;

(3) $M^{\perp}=(\overline{\mathrm{span}\,M})^{\perp}$.

2. 设M是 Hilbert 空间H的子空间. 证明$\overline{M}=(M^{\perp})^{\perp}$, $M^{\perp}=(\overline{M})^{\perp}$.

3. 设X是内积空间, u, $v\in X$. 若对一切$x\in X$皆有$(x,u)=(x,v)$, 则$u=v$.

4. 设X是实内积空间. 若$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$,则$x\perp y$. 当$X$是复内积空间时,这个结论是否仍然成立?

5. 设X是内积空间, A, $B\subset X$. 记$L=\mathrm{span}(A\cup B)$. 证明$L^{\perp}=A^{\perp}\cap B^{\perp}$.

6. 设X是内积空间,x, $y\in X$. 证明$x\perp y$的充分必要条件是, 对一切数α皆有$\|x+\alpha y\|=\|x-\alpha y\|$.

7. 设X是内积空间,x, $y\in X$. 证明$x\perp y$的充分必要条件是,对一切数α皆有$\|x+\alpha y\|\geqslant\|x\|$.

8. 设X是复内积空间,T: $X\to X$是有界线性算子. 若对每一个$x\in X$皆有$(Tx,x)=0$, 则$T=0$. 试举例说明这个结论在实内积空间中不成立.

§3　内积空间的正交系

我们把欧氏空间,例如$\mathbb{R}^3$, 看作为内积空间(以及 Hilbert 空间)的模型. 在$\mathbb{R}^3$中有这样的基, 例如取$e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,$

$1,0), e_3=(0,0,1)$，它的基元是相互正交的. 因此每一个 $x\in\mathbf{R}^3$ 有唯一的表示式 $x=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\alpha_3e_3$，数组$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$称为 x 的坐标. 利用基元的相互正交性，我们可以用内积的形式表示 x 的坐标，即

$$(x,e_j)=\left(\sum_{i=1}^{3}\alpha_ie_i,\ e_j\right)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_i(e_i,e_j)=\alpha_j \qquad (j=1,2,3).$$

因此 $x=\sum\limits_{i=1}^{3}(x,e_i)e_i$. 利用基元的相互正交性，还可以得到

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{3}|(x,e_i)|^2.$$

在本节中，我们将把 $\mathbf{R}^3$ 中关于基和坐标的概念及其性质推广到内积空间和 Hilbert 空间中去.

定义 3.1 设X是内积空间，集 $M\subset X$ 并且 $\theta\notin M$. 若 M 中的元素是两两正交的，则 M 称为X中的一个正交系(orthogonal system). 若 M 是X的正交系并且 M 中每一个元素的范数都是 1，即对任何 $x,y\in M$ 都有

$$(x,y)=\begin{cases}0 & 若\ x\neq y\\ 1 & 若\ x=y,\end{cases}$$

则 M 称为X中的一个规范正交系(orthonormal system).

当正交系(或规范正交系)M 是可数集时，M 称为正交序列(或规范正交序列) (orthogonal sequence (*or* orthonormal sequence)).

关于内积空间X中的正交系和规范正交系，有下面一些简单性质.

1. 若集$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是正交的，则

$\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2.$

事实上,由于$(x_i,x_j)=0(i\neq j)$,则

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\ \sum_{j=1}^{n}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i,x_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(x_i,\ x_i)=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2.$$

2. 任何规范正交系M都是线性无关的. 事实上,取M中任意有限子集$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,若$\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\cdots+\alpha_ne_n=\theta$,则对每一个$j=1,2,\cdots,n$都有

$$0=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,e_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i,e_j)=\alpha_j(e_j,e_j)=\alpha_j.$$

这表明$\{e_1,\ e_2,\ \cdots,e_n\}$是线性无关的. 故$M$是线性无关的.

3. 若$\{e_1,e_2,\ \cdots,\ e_n\}$是规范正交系, 则每一个$x\in\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$都可以唯一地表示为

$$x=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i.$$

事实上,由于$\{e_1,\ e_2,\cdots,\ e_n\}$是线性无关的, 于是每一个$x\in\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$可表示为$x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i$. 故对每一个$j=1,\ 2,\cdots,n$,

$$(x,e_j)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i,e_j\right)=\alpha_j(e_j,e_j)=\alpha_j.$$

4. 对于任何线性无关的序列$\{x_i\}$, 可以应用如下Gram-Schmidt规范正交化方法得到一个规范正交序列$\{e_i\}$, 使得对每一个$n\in\mathrm{N}$皆有

$$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}.$$

由此又可得到

$$\overline{\mathrm{span}\{e_i\}}_{i\in N}=\overline{\mathrm{span}\{x_i\}}_{i\in N}. \tag{3.1}$$

具体作法如下：令

$$e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

x_2 可以表示为 $x_2=(x_2,e_1)e_1+v_2$，这里 $v_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$. 由于 x_1,x_2 线性无关，则 $v_2\neq\theta$，并且容易看出 $(v_2,e_1)=0$，即 $v_2\perp e_1$. 令

$$e_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}.$$

同样，记 $v_3=x_3-(x_3,\ e_1)e_1-(x_3,\ e_2)e_2$，则 $v_3\neq\theta$ 并且 $v_3\perp e_1$，$v_3\perp e_2$. 令

$$e_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}.$$

依此方法继续下去，即可得到一个规范正交序列 $\{e_i\}$：

$$v_i=x_i-\sum_{j=1}^{i-1}(x_i,e_j)e_j,\qquad e_i=\frac{v_i}{\|v_i\|}.$$

易见对每一个 $n\in\mathbf{N}$，$\mathrm{span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$. 由此可推得(3.1)式成立，其验证工作留给读者完成.

例1 $\mathbf{R}^n$ 中，$\{e_1,\ e_2,\cdots,e_n\}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 的一个规范正交系，其中 e_i 的坐标除第 i 个坐标为 1 外其余全为零 $(i=1,2,\cdots,n)$.

例2 l^2 中，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n,\cdots\}$ 是 l^2 的一个规范正交系，其中 e_n 的坐标除第 n 个坐标为 1 外其余全为零 $(n\in\mathbf{N})$.

例3 实 $L^2[0,2\pi]$ 中，若定义二元素 f,g 的内积为

$$(f,g)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)g(t)dt,$$

则 $L^2[0,2\pi]$ 为实内积空间. 令

$$u_0=\frac{1}{\sqrt{2}},u_n(t)=\cos nt\quad(n\in\mathbf{N}),$$

$$v_n(t)=\sin nt\quad(n\in\mathbf{N}),$$

则 $\mathscr{F}=\{u_0,u_1,u_2,u_3,\cdots,v_1,v_2,v_3,\cdots\}$ 是 $L^2[0,\ 2\pi]$ 的一个规范正

交系. 每一个 $x\in L^2[0,2\pi]$可以展开为 Fourier 级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)dt=(x,1),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\cos ntdt=(x,u_n),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x(t)\sin ntdt=(x,v_n)\quad(n\in\mathbb{N}).$$

$a_0,a_n,b_n(n\in\mathbb{N})$称为 x 关于 $\mathscr{F}$ 的 Fourier 系数.

在内积空间中,同样可以定义某一元素的 Fourier 系数.

定义 3.2 设 $F=\{e_i\}$是内积空间X的规范正交系. 对于 $x\in X$, 我们称内积(x, e_i)为 x 关于 F 的 Fourier 系数(Fourier coefficient).

利用 Fourier 系数,可以给出投影的解析表示式.

定理 3.3 设$\{e_i\}$是内积空间X的规范正交系,$M=\text{span}\{e_1, e_2,\cdots,e_n\}$,$x\in X$,则

(1) $x_0=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$ 是 x 在 M 上的投影;

(2) $\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$;

(3) $\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2$.

证明 (1) 显然 $x_0=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\in M$, 而且对每一个 $j=1, 2,\cdots,n$, 有

$$(x-x_0,e_j)=(x,e_j)-(x_0,e_j)=0.$$

这表明 $x-x_0$ 与$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$正交，因此 $x-x_0\in M^{\perp}$. 由定义 2.7, x_0 是 x 在 M 上的投影.

(2) 由勾股定理

$$\|x_0\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|(x, e_i)e_i\|^2=\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2.$$

(3) 由于 $x=x_0+(x-x_0)$, $x_0\perp x-x_0$, 再应用勾股定理

$$\|x\|^2=\|x_0\|^2+\|x-x_0\|^2,$$

从而$\|x-x_0\|^2=\|x\|^2-\|x_0\|^2$. □

定理 3.4 设$\{e_i\}$是内积空间X的规范正交系，则对于每一个 $x\in X$, 恒有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2 \qquad (3.2)$$

(Bessel 不等式).

证明 由定理 3.3, 对任意的 $n\in\mathbf{N}$, 恒有

$$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

令 $n\to\infty$, 则 Bessel 不等式(3.1)得证. □

推论 3.5 设$\{e_i\}$是内积空间X的规范正交系,则对于每一个 $x\in X$, 恒有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x,e_n)=0$.

一个自然的问题是: Bessel 不等式在什么条件下成为等式? 从定理 3.3 和定理 3.4 的证明中可以看到: 若X是有限维内积空间, 当选取的规范正交系$\{e_1, \cdots, e_n\}$满足 $M=\mathrm{span}\{e_1, \cdots, e_n\}=X$ 时, 由于 $M^{\perp}=\{\theta\}$, 对于每一个 $x\in X$(按照定理 3.3 的记号), 有 $x-x_0=\theta$, 则这时 Bessel 不等式取等号. 对于无限维的内积空间 X, 下面的定理将证明, 当选取的规范正交系$\{e_i\}$包含了充分多的元素且满足$\overline{\mathrm{span}\{e_i\}}=X$ 时, Bessel 不等式成为等式. 我们具体讨论如下.

定义 3.6 设 $F=\{e_i\}$ 是内积空间 X 的规范正交系. 若

$$\overline{\operatorname{span} F}=X,$$

则 F 称为 X 的完全规范正交系 (total orthonormal system).

定理 3.7 设 H 是 Hilbert 空间, $F=\{e_i\}$ 是 H 的规范正交系. 则下列各条等价.

(1) F 是 H 的完全规范正交系.

(2) H 中不存在与所有 $e_i\in F$ 正交的非零元素, 即若对每一个 $e_i\in F$ 都有 $x\perp e_i$ 则 $x=\theta$, 也就是说 $F^{\perp}=\{\theta\}$.

(3) 对于每一个 $x\in H$, $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$

(4) 对于每一个 $x\in H$, 恒有

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2 \qquad \text{(Parseval 恒等式)}.$$

证明 (1)⇒(2) 假设 $\overline{\operatorname{span} F}=H$. 对于任意 $x\in F^{\perp}$, 要证 $x=\theta$. 由于 $x\in H=\overline{\operatorname{span} F}$, 则存在 $x_n\in\operatorname{span} F\,(n\in\mathbb{N})$, 使得 $x_n\to x$. 而 $x\in F^{\perp}$ 可推出 $x\in(\operatorname{span} F)^{\perp}$. 于是 $(x_n,x)=0\,(n\in\mathbb{N})$. 由内积的连续性,

$$(x,x)=\lim_{n\to\infty}(x_n,x)=0,$$

故 $x=\theta$.

(2)⇒(1) 假设 $F^{\perp}=\{\theta\}$. 由于 $F\subset\overline{\operatorname{span} F}$, 则

$$\{\theta\}\subset(\overline{\operatorname{span} F})^{\perp}\subset F^{\perp}=\{\theta\}.$$

于是 $(\overline{\operatorname{span} F})^{\perp}=\{\theta\}$. 应用推论 2.10, 得到

$$H=\overline{\operatorname{span} F}\oplus(\overline{\operatorname{span} F})^{\perp}=\overline{\operatorname{span} F}.$$

(2)⇒(3) 对于每一个 $x\in H$, 由 Bessel 不等式

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2\leqslant\|x\|^2.$$

我们证明$\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$收敛．事实上，令$x_n=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$,对于任意$m,n$(不妨设$m<n$)，由于$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2<\infty$,则

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{i=m+1}^{n}(x,\ e_i)e_i\right\|^2$$

$$=\sum_{i=m+1}^{n}|(x,e_i)|^2\to 0\ \ (m,n\to\infty).$$

这表明$\{x_n\}$是H中的Cauchy序列.由H的完备性,可设$x_n\to y\in H$,即$y=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ e_i)e_i\in H$．下面只要证明$y=x$．为此我们先指出$x-y\perp F$,因为对于每一个$e_j\in F$,由内积的连续性,

$$(x-y,e_j)=(x,\ e_j)-\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i,e_j\right)$$

$$=(x,\ e_j)-\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)(e_i,e_j)$$

$$=(x,e_j)-(x,e_j)=0.$$

由于(2)成立,我们得到$x-y\in F^{\perp}=\{\theta\}$,即$x-y=\theta$,故$x=y$.

(3)⇒(4)　对于每一个$x\in H$,由假设$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ e_i)e_i$，因此

$$\|x\|^2=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i,\ \sum_{j=1}^{\infty}(x,\ e_j)e_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(x,e_j)}(e_i,e_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(x,e_i)}=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2.$$

(4)⇒(2) 任取 $x\in F^{\perp}$，即对于每一个 $e_i\in F$ 都有 $(x,e_i)=0$，由假设 Parseval 恒等式成立，则

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2=0,$$

故 $x=\theta$. 因此 $F^{\perp}=\{\theta\}$. □

Bessel 不等式表明，内积空间 X 中任一元素 x 关于规范正交系 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数组成为序列 $((x,e_1),(x,e_2),\cdots)\in l^2$. 反过来，若 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)\in l^2$，是否存在 $x\in X$ 使得 α_i 为 x 关于 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数？当 X 完备时，下面的定理指出此问题有肯定的回答.

定理 3.8(Riesz-Fischer) 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ 是 H 的规范正交系. 令 $M=\overline{\operatorname{span}\{e_i\}}$. 若有一数列 $\{\alpha_i\}$ 使得

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty,$$

则存在唯一的 $x\in M$，使得 α_i 为 x 关于 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数，$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i$ 且 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$.

证明 令 $x_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$，则 $x_n\in M(n\in\mathbf{N})$，并且对于 $m<n$ 有

$$\|x_n-x_m\|^2=\left\|\sum_{i=m+1}^{n}\alpha_i e_i\right\|^2=\sum_{i=m+1}^{n}|\alpha_i|^2.$$

由于 $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$，上式表明 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 序列. 因 H 是完备的，故存在唯一的 $x\in H$ 使得

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i e_i=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

而 M 是 H 的闭子空间且 $x_n\in M$，因此必有 $x\in M$. 现在我们指出 α_i 就是此 x 关于 $\{e_i\}$ 的 Fourier 系数. 这是因为由内积的连续性，对于每一个 $i\in\mathrm{N}$ 有

$$(3.3)\qquad (x,e_i)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j e_j,\ e_i\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j(e_j,e_i)=\alpha_i.$$

最后，注意到 $\{e_i\}$ 是 M 的完全规范正交系，而 Hilbert 空间 H 的闭子空间 M 是完备的，由定理3.7及(3.3)则得 $\|x\|^2=\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$.

□

下面，我们讨论可分 Hilbert 空间. 它们具有一个共同的特征，即在内积空间同构的意义下. 无限维可分 Hilbert 空间等同于 l^2 空间. 因此对无限维可分 Hilbert 空间的研究可转化为对 l^2 空间的研究.

定理 3.9 无限维可分 Hilbert 空间必有可数的完全规范正交系.

证明 设 H 是无限维可分 Hilbert 空间，则 H 中有一个可数集 $A=\{a_i\mid i\in\mathrm{N}\}$ 在 H 中稠密. 取 A 中第一个不为 θ 的元素 a_{n_1}，记 $x_1=a_{n_1}$. 在 A 中取 a_{n_1} 之后第一个与 a_{n_1} 线性无关的元素 a_{n_2}，记 $x_2=a_{n_2}$. 于是用归纳法在 A 中可以选取一个线性无关的序列，记为 $\{x_i\}$，满足 $\operatorname{span}A=\operatorname{span}\{x_i\}$. 应用 Gram-Schmidt 的规范正交化方法，可以得到一个规范正交序列 $\{e_i\}$ 且满足

$$\overline{\operatorname{span}\{e_i\}}=\overline{\operatorname{span}\{x_i\}}=\overline{\operatorname{span}A}=H.$$

由定义 3.6, $\{e_i\}$ 是 H 的完全规范正交序列. □

定理 3.10 任何无限维可分 Hilbert 空间 H 都与 l^2 同构;

任何 n 维实(或复)内积空间都与 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)同构.

证明 设 H 是无限维可分 Hilbert 空间(不妨设 H 与 l^2 都是复数域上的空间). 由定理 3.9, H 有一个可数的完全规范正交系 $\{e_i\}$. 于是由定理 3.7, 每一个 $x\in H$ 都可以表示为

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i.$$

定义映射 $T:H\to l^2$, 使得对于每一个 $x\in H$

$$Tx=((x,e_1),(x,e_2),(x,e_3),\cdots).$$

则

(1) T 显然是线性算子.

(2) T 保持内积, 因为

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i,\ \sum_{j=1}^{\infty}(y,e_j)e_j\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(y,\ e_j)}(e_i,e_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}(x,\ e_i)\overline{(y,e_i)}=(Tx,Ty).$$

(3) T 是双射. 为此只要证明 T 是满射. 任取 $\tilde{x}=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\cdots)\in l^2$, 则 $\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2<\infty$. 由定理 3.8, 存在唯一的 $x\in M$ 使得 $\alpha_i=(x,e_i)\ (i\in\mathbf{N})$ 且 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_ie_i$. 故 $Tx=\tilde{x}$. 这表明 T 是满射.

因此 T 是 H 到 l^2 上的同构映射. 故 H 与 l^2 同构.

由于有限维内积空间的完全规范正交系是有限的, 类似于上面的证明即可得到, 任何 n 维实(或复)内积空间都与 $\mathbf{R}^n$(或 $\mathbf{C}^n$)同构. ▯

由此定理，任何无限维可分 Hilbert 空间都与 l^2 同构．因此，任何两个在同一数域上的无限维可分 Hilbert 空间都是同构的．

习　题

1．设 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是内积空间 X 的规范正交系，$M=\mathrm{span}\{e_1,\cdots,e_n\}$．定义算子 $P: X\to M$，使得对于每一个 $x\in X$

$$Px=\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i.$$

由定理 3.3 知，Px 是 x 在 M 上的投影．我们称 P 为投影算子．证明

(1) $P: X\to M$ 是有界线性算子，且 $\|P\|=1$；

(2) $P^2=P$ （这里 $P^2=P\circ P$）．

2．设 $\{e_i\}$ 是内积空间 X 的规范正交系，则对于任意 $x,y\in X$ 恒有

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)(y,e_i)|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

3．设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的规范正交系，$M=\mathrm{span}\{e_i\}$，$x\in H$．证明 $x\in M$ 的充分必要条件是，x 可以表示为 $x=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i$．

4．设 $\{e_i\}$ 是 Hilbert 空间 H 的规范正交系．证明 $\{e_i\}$ 是完全规范正交系的充分必要条件是，对于任意 $x,y\in H$ 恒有

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)\overline{(y,e_i)}.$$

§4　Hilbert 空间中有界线性泛函的表示

在本节中，我们讨论 Hilbert 空间 H 上的有界线性泛函与 H 中元素的一个一一对应关系，或者说 H 上的有界线性泛函可以由 H 中的元素来表示．这是 Hilbert 空间的一个重要的特征．

在内积空间 X 中，任何一个固定的元素 $y\in X$ 都可以定义一个 X 上的泛函 f_y，使得对于每一个 $x\in X$，

(4.1) $$f_y(x)=(x,y).$$

由 Schwarz 不等式，$|f_y(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，因此 f_y 是有界线性泛函，并且$\|f_y\|\leqslant\|y\|$. 另一方面，取 $x=y$，有$|f_y(y)|=(y,y)=\|y\|^2$，则$\|f_y\|\geqslant\|y\|$. 因此$\|f_y\|=\|y\|$.

反之，在 Hilbert 空间H中，每一个H上的有界线性泛函f可以由空间H中的元素来表示．这就是下面的一个重要的定理，即 Riesz 表示定理.

定理 4.1(Riesz) 设H是 Hilbert 空间，f是H上的有界线性泛函．则存在唯一的 $u\in H$，使得对于每一个 $x\in H$ 有

(4.2) $$f(x)=(x,u),$$

并且$\|f\|=\|u\|$.

证明 存在性．若f是零泛函(即 $f=0$)，只要取 $u=\theta$，则定理的结论成立．现设 $f\neq 0$．记f的零空间为$\mathscr{N}(f)$．(在继续我们的证明之前，作如下的分析：由于对于每一个 $x\in\mathscr{N}(f)$ 皆有 $f(x)=0$，因此满足定理条件的 u 应该在$\mathscr{N}(f)^\perp$中去寻找．)由第五章推论 4.5，$\mathscr{N}(f)$是H的闭子空间．因 $f\neq 0$，$\mathscr{N}(f)$是H的真子空间．由推论 2.10，$\mathscr{N}(f)^\perp\neq\{\theta\}$，于是存在 $z\in\mathscr{N}(f)^\perp$ 且 $z\neq\theta$．因$\mathscr{N}(f)\cap\mathscr{N}(f)^\perp=\{\theta\}$，可知 $f(z)\neq 0$.

对于每一个 $x\in H$，由于$f\left(x-\frac{f(x)}{f(z)}z\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(z)}f(z)=0$，则 $x-\frac{f(x)}{f(z)}z\in\mathscr{N}(f)$，从而 $x-\frac{f(x)}{f(z)}z\perp z$．于是

$$\left(x-\frac{f(x)}{f(z)}z,\ z\right)=(x,z)-\frac{f(x)}{f(z)}(z,z)=0.$$

从上式解出 $f(x)$，

$$f(x)=\frac{f(z)}{(z,z)}(x,\ z)=\left(x,\overline{\frac{f(z)}{(z,z)}}z\right).$$

令 $u=\dfrac{\overline{f(z)}}{(z,z)}z$,则对于每一个 $x\in H$ 皆有 $f(x)=(x,u)$.

唯一性。若存在 $u,v\in H$,使得对于每一个 $x\in H$ 皆有

$$f(x)=(x,u)=(x,v).$$

则对于每一个 $x\in H$ 皆有$(x,u-v)=0$. 特别地,取 $x=u-v$,则得到$(u-v,u-v)=0$,从而 $u-v=\theta$,故 $u=v$.

仿照(4.1)式之后的证明,即可得到$\|f\|=\|u\|$. □

推论 4.2 设 H^* 是 Hilbert 空间H的对偶空间, 映射 $J:H\to H^*$ 定义为

$$Jy=f_y\in H^* \qquad (y\in H)$$

(这里 $f_y(x)=(x,y) \quad (x\in H)$),则

(1) J 是共轭线性算子,即

$$J(y_1+y_2)=Jy_1+Jy_2, \qquad J(\alpha y)=\bar{\alpha}Jy;$$

(2) J 是双射且保持范数.

证明 (1) 任取 $y_1,y_2\in H$,对于每一个 $x\in H$,

$$\begin{aligned}(J(y_1+y_2))(x)&=f_{y_1+y_2}(x)=(x,y_1+y_2)\\&=(x,y_1)+(x,y_2)=f_{y_1}(x)+f_{y_2}(x)\\&=(Jy_1+Jy_2)(x),\end{aligned}$$

故 $J(y_1+y_2)=Jy_1+Jy_2$. 又任取 $y\in H$ 及数 α, 对于每一个 $x\in H$.

$$\begin{aligned}(J(\alpha y))(x)&=f_{\alpha y}(x)=(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)\\&=\bar{\alpha}f_y(x)=\bar{\alpha}(Jy)(x);\end{aligned}$$

故 $J(\alpha y)=\bar{\alpha}Jy$. 因此 J 是共轭线性的.

(2) 由 Riesz 表示定理知, J 是双射且保持范数$\|Jy\|=\|y\|$.

□

推论中的 J 常称为是H到 H^* 上的一个复共轭同构映射, 并且称H与 H^* 是复共轭同构的. 在复共轭同构的意义下, 可以将

H 与 H^* 视为同一的.（若H是实 Hilbert 空间，则复共轭同构就是同构.）必须注意，当 $\alpha y\in H$ 视为H上的有界线性泛函时，有

$$(\alpha y)(x)=(x,\alpha y)=\bar{\alpha}(x,y)=\bar{\alpha}y(x).$$

在 Riesz 表示定理的证明中，证明唯一性的方法也是值得注意的. 由其证明可知，在一般的内积空间中，下面的引理成立.

引理 4.3 设 u 和 v 是内积空间X 中的两点，若对于每一个 $x\in X$ 皆有

$$(x,u)=(x,v),$$

则 $u=v$. 特别地，若对于每一个 $x\in X$ 皆有$(x,u)=0$，则 $u=\theta$.

习　　题

1. 设X^*是内积空间 X的对偶空间. 映射 $J:X\to X^*$ 定义为

$$Jy=f_y\in X^*\quad (y\in X)$$

（这里 $f_y(x)=(x,y)\quad (x\in X)$）. 若 J 是满射，则X是 Hilbert 空间.

2. 若H是 Hilbert 空间，则H与 H^{**}同构.

3. 设$\{x_n\}$是内积空间 X中的点列. 证明：若$\{x_n\}$弱收敛于 x，则$(x_n,x)\to(x,x)$.

§5　Hilbert 空间中的伴随算子

设 H_1 和 H_2 是两个 Hilbert 空间. 按照内积导出的范数它们是 Banach 空间. 仍用记号 $\mathscr{B}(H_1,\ H_2)$表示所有 H_1 到 H_2 的有界线性算子的全体. 对于 $T\in\mathscr{B}(H_1,H_2)$，由第六章定义 3.4，T 的伴随算子 $T^*:H_2^*\to H_1^*$ 定义为

$$(5.1)\qquad (T^*g)(x)=g(Tx)\qquad (g\in H_2^*,x\in H_1).$$

为了与本节的记号加以区别，我们把上面定义的 T^* 称为T的 Banach 伴随算子. 在本节中我们把 Banach 伴随算子T^* 记为 T'（因为在下面，我们将用记号 T^* 表示T的 Hilbert 伴随算子）.

于是(5.1)式变为

$$(5.2)\qquad (T'g)(x)=g(Tx)\qquad (g\in H_2^*, x\in H_1).$$

映射 J_1: $H_1\to H_1^*$ 与 J_2: $H_2\to H_2^*$ 是在推论 4.2 中定义的复共轭同构映射. 由于 $g\in H_2^*, T'g\in H_1^*$, 应用 Riesz 表示定理, H_1 上的有界线性泛函 $T'g$ 对应于 H_1 上的一点 $J_1^{-1}T'g$, 使得对于每一个 $x\in H_1$,

$$(T'g)(x)=(x, J_1^{-1}T'g)$$

再应用 Riesz 表示定理, g 又对应于 H_2 上的一点 y, 即 $g=J_2y$, 于是

$$(T'g)(x)=(x, J_1^{-1}T'J_2y)$$

并且

$$g(Tx)=(Tx, y).$$

因此, 由(5.2)式得到

$$(5.3)\qquad (Tx, y)=(x, J_1^{-1}T'J_2y).$$

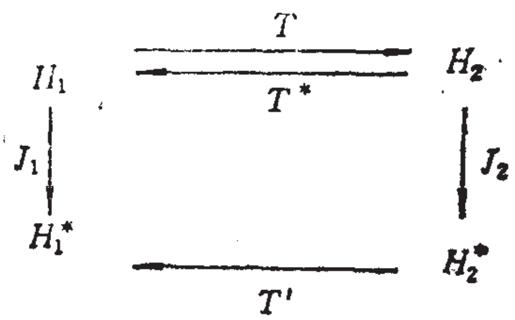


图 5.1

定理 5.1 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间, $T\in\mathscr{B}(H_1, H_2)$. 则存在唯一的 $T^*\in\mathscr{B}(H_2, H_1)$, 使得对于每一个 $x\in H_1$ 和 $y\in H_2$ 有

$$(5.4)\qquad (Tx, y)=(x, T^*y),$$

并且 $\|T\|=\|T^*\|$.

证明 由此定理前面的讨论, 我们令

$$(5.5)\qquad T^*=J_1^{-1}T'J_2.$$

由图 5.1 和(5.3)式知，T^* 是 H_2 到 H_1 的映射且满足(5.4). 现在我们只需要证明下面两条成立.

(1) T^* 是线性的.

对于任意 $y_1, y_2 \in H_2$，数 α, β 和 $x \in H_1$，

$$\begin{aligned}(x, T^*(\alpha y_1+\beta y_2)) &= (Tx, \alpha y_1+\beta y_2) \\ &= \bar{\alpha}(Tx, y_1)+\bar{\beta}(Tx, y_2) \\ &= \bar{\alpha}(x, T^*y_1)+\bar{\beta}(x, T^*y_2) \\ &= (x, \alpha T^*y_1+\beta T^*y_2).\end{aligned}$$

因此 $T^*(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^*y_1+\beta T^*y_2$，故 T^* 是线性算子.

(2) T^* 是有界的且 $\|T\|=\|T^*\|$.

应用 Schwarz 不等式，对于任意 $x \in H_1, y \in H_2$，有

$$|(x, T^*y)|=|(Tx, y)| \leqslant \|Tx\|\|y\| \leqslant \|T\|\|x\|\|y\|.$$

若取 $x=T^*y$，则

$$\|T^*y\|^2 \leqslant \|T\|\|T^*y\|\|y\|,$$

从而 $\|T^*y\| \leqslant \|T\| \cdot \|y\|$. 由此得到，$T^*$ 是有界的且 $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. 另一方面，

$$|(Tx, y)|=|(x, T^*y)| \leqslant \|x\|\|T^*y\| \leqslant \|T^*\|\|x\|\|y\|.$$

若取 $y=Tx$，则

$$\|Tx\|^2 \leqslant \|T^*\|\|x\|\|Tx\|,$$

从而 $\|Tx\| \leqslant \|T^*\|\|x\|$. 由此得到 $\|T\| \leqslant \|T^*\|$. 因此 $\|T\|=\|T^*\|$. □

定义 5.2 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，$T \in \mathscr{B}(H_1, H_2)$. 则定理 5.1 中的算子 T^*: $H_2 \to H_1$ 称为 T 的 Hilbert 伴随算子 (Hilbert-adjoint operator)，或称为 Hilbert 共轭算子.

例 1 设 $T: \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 是线性算子，$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的规范正交基. 在此基下，T 对应的 n 阶矩阵为 $A=(a_{ij})$. 对于任意 x, $y \in \mathbb{C}^n$(x 与 y 皆表示为关于这组基的列向量)，内积定义为

$$(x, y)=x^T\bar{y}, \tag{5.6}$$

这里 x^T 表示 x 的转置，因此 x^T 是一个行向量，$\bar{y}$ 表示列向量 y 的复共轭(即对 y 的每一个分量取复共轭而得到的向量)．按矩阵乘积 $x^T\bar{y}$ 定义的内积(5.6)实际上与§1例1中由(1.6)定义的内积相同．注意到转置矩阵的性质 $(Ax)^T=x^TA^T$，则

$$(Tx,y)=(Ax)^T\bar{y}=x^TA^T\bar{y}.$$

设 T 的 Hilbert 伴随算子对应的矩阵为 B，记 $\bar{B}$ 为矩阵 B 的复共轭矩阵，则

$$(x,T^*y)=x^T\bar{B}\bar{y}.$$

由 Hilbert 伴随算子的定义，得到 $x^TA^T\bar{y}=x^T\bar{B}\bar{y}\,(x,y\in\mathbb{C}^n)$，故必有 $A^T=\bar{B}$．因此

$$B=\bar{A}^T=(\bar{a}_{ji}).$$

这表明 T 的Hilbert伴随算子 T^* 对应的矩阵是 T 对应的矩阵的复共轭转置矩阵．对比第六章§3例1，T 的 Banach 伴随算子 T' 对应的矩阵是 T 对应的矩阵的转置矩阵．由此便可知道，T 的 Banach 伴随算子与 Hilbert 伴随算子的差异．

Hilbert 伴随算子有下面的基本运算性质．

定理 5.3 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，$S,T\in\mathscr{B}(H_1,H_2)$，$\alpha\in\mathbb{K}$(数域)．则

(1) $(S+T)^*=S^*+T^*$;

(2) $(\alpha T)^*=\bar{\alpha}T^*$;

(3) $(T^*)^*=T$;

(4) $\|T^*T\|=\|TT^*\|=\|T\|^2$;

(5) 若 $T^*T=0$，则 $T=0$;

(6) 当 $H_1=H_2$ 时，$(ST)^*=T^*S^*$.

证明 我们只证明(4)，其余留给读者作为习题．

应用 Schwarz 不等式

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(x,T^*Tx)\leqslant\|x\|\cdot\|T^*Tx\|$$

$$\leqslant \|T^*T\| \cdot \|x\|^2,$$

于是得到

$$\|T\|^2 \leqslant \|T^*T\| \leqslant \|T^*\| \|T\| = \|T\|^2.$$

因此$\|T^*T\| = \|T\|^2$. 又由(3)得到

$$\|TT^*\| = \|T^{**}T^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2.$$

故(4)得证. □

从例1中,我们已经看到 Hilbert 伴随算子 T^* 在 $\mathbb{C}^n$ 中相当于矩阵理论中的复共轭转置矩阵. 下面, 我们还可以把矩阵理论中的 Hermite 矩阵,酉矩阵等概念推广到 Hilbert 空间中来.

定义 5.4 设H是 Hilbert 空间,$T \in \mathscr{B}(H,H)$.

(1) 若 $T^* = T$, 则T称为H上的自伴算子 (self-adjoint operator),或称为 Hermite 算子(Hermitian operator).

(2) 若T是双射且 $T^* = T^{-1}$,则T称为H上的酉算子(unitary operator).

由 Hilbert 伴随算子 T^* 的定义,对于任意 $x,y \in H$ 有

$$(Tx,y) = (x,T^*y).$$

由此容易看出:T 是自伴算子的充分必要条件是, 对于任意 $x,y \in H$ 有

$$(Tx,y) = (x,Ty).$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中,设T是 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 的线性算子(从而是有界的), T 在给定的基下对应的矩阵为 A. 由例1知,T^* 对应的矩阵是A的复共轭转置矩阵,即 $\overline{A}^T$. 因此, T 是自伴算子的充分必要条件是, T 对应的矩阵 A 是 $\mathbb{C}^n$ 中的 Hermite 矩阵,即满足 $A = \overline{A}^T$;T 是酉算子的充分必要条件是,T对应的矩阵 A 是$\mathbb{C}^n$中的酉矩阵,即满足 $A^{-1} = \overline{A}^T$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中,设T是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的线性算子,T对应的矩阵为A,于是 T^* 对应的矩阵为 A^T. 因此,T 是自伴算子的充分必要条件是, A

为实对称矩阵，即$A=A^T$；T是酉算子的充分必要条件是$A^{-1}=A^T$.

现在，我们讨论自伴算子的性质. 首先证明下面的引理.

引理 5.5 设X是复内积空间，$T: X\to X$ 是有界线性算子，则 $T=0$ 的充分必要条件是，对一切 $x\in X$ 皆有

$$(Tx,x)=0. \tag{5.7}$$

证明 若 $T=0$，则(5.7)显然成立. 反之，假设(5.7)式对一切 $x\in X$ 成立. 对于任意 $x,y\in X$ 和数 α，令 $v=\alpha x+y$，则

$$\begin{aligned}0=(Tv,v)&=|\alpha|^2(Tx,x)+(Ty,y)+\alpha(Tx,y)+\bar{\alpha}(Ty,x)\\&=\alpha(Tx,y)+\bar{\alpha}(Ty,x)\end{aligned} \tag{5.8}$$

若令 $\alpha=1$，则由(5.8)式得到

$$(Tx,y)+(Ty,x)=0. \tag{5.9}$$

若令 $\alpha=i$，则由(5.8)式得到

$$(Tx,y)-(Ty,x)=0. \tag{5.10}$$

(5.9)式与(5.10)式相加，则得到

$$(Tx,y)=0 \qquad (x,y\in X).$$

若取 $y=Tx$，则由上式得 $Tx=0(x\in X)$，故 $T=0$. □

值得注意，此引理在实内积空间中不成立. 例如在$\mathbf{R}^2$ 中，非零矩阵

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

是一个 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的有界线性算子且满足如下条件：对于任意 $x=(\xi_1,\xi_2)^T\in\mathbf{R}^2$，皆有$(Ax,x)=0$.

定理 5.6 设H是复 Hilbert 空间，T: $H\to H$ 是有界线性算子，则T是自伴算子的充分必要条件是，对一切 $x\in H$，(Tx,x)都是实数.

证明 假设T是自伴算子，则对一切 $x\in H$ 有

$$(Tx,x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)},$$

因此(Tx,x)是实数．反之，假设对一切$x\in H$，(Tx,x)都是实数，则

$$(Tx,x)=\overline{(Tx,x)}=\overline{(x,T^*x)}=(T^*x,x),$$

从而$((T-T^*)x,x)=0$．由引理5.5，便得到$T=T^*$，即T是自伴算子．□

定理 5.7 设T和S是Hilbert空间H上的自伴算子．则TS是自伴算子的充分必要条件是$TS=ST$.

证明 由伴随算子的性质，$(TS)^*=S^*T^*=ST$．由此可见，TS是自伴算子的充分必要条件是$TS=ST$．□

定理 5.8 设$\{T_n\}$是Hilbert空间H上的一列自伴算子．若$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$（按算子范数收敛），则$T$也是$H$上的自伴算子.

证明 由假设及伴随算子的性质，当$n\to\infty$时，

$$\|T_n^*-T^*\|=\|(T_n-T)^*\|=\|T_n-T\|\to 0,$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}T_n^*=T^*$．因为$T_n$是自伴算子，又有

$$\lim_{n\to\infty}T_n^*=\lim_{n\to\infty}T_n=T.$$

因此由极限的唯一性，必有$T^*=T$．□

关于酉算子有下面的性质.

定理 5.9 设T和S是Hilbert空间H上的酉算子．则

(1) T保持范数，即对于每一个$x\in H$皆有$\|Tx\|=\|x\|$;

(2) 当$H\neq\{\theta\}$时，$\|T\|=1$;

(3) T^{-1}是酉算子.

(4) TS是酉算子.

证明 (1) 由酉算子的定义$T^*=T^{-1}$，则对于每一个$x\in H$

$$\|Tx\|^2=(Tx,Tx)=(x,T^*Tx)=(x,x)=\|x\|^2.$$

(2) 由(1)立即得到.

(3) 由于酉算子是双射，故T^{-1}也是双射，并且

$$(T^{-1})^*=T^{**}=T=(T^{-1})^{-1}.$$

所以T^{-1}是酉算子.

(4) 由于T和S都是双射,故复合映射TS是双射,并且

$$(TS)^*=S^*T^*=S^{-1}T^{-1}=(TS)^{-1}.$$

所以TS是酉算子. □

定理 5.10 设$\{T_n\}$是Hilbert空间H上的一列酉算子. 若$\lim\limits_{n\to\infty}T_n=T$,则$T$也是$H$上的酉算子.

证明 由假设$T_n\to T$,则

$$\|T_n{}^*-T^*\|=\|T_n-T\|\to 0 \quad (n\to\infty),$$

即$\lim\limits_{n\to\infty}T_n{}^*=T^*$. 因此$T^*T=\lim\limits_{n\to\infty}T_n{}^*T_n=I$. 同理$TT^*=\lim\limits_{n\to\infty}T_n\cdot T_n{}^*=I$. 所以$T$是酉算子. □

我们知道,酉算子保持范数(定理 5.9(1)),但是保持范数的有界线性算子不一定是酉算子. 下面的例子表明: 存在这样的有界线性算子,它保持范数,但不是满射.

例 2 在l^2中,定义$T: l^2\to l^2$,使得对于每一个$(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots).$$

则T保持范数,但T不是满射,从而T不是酉算子.

定理 5.11 设H是复Hilbert空间,$T: H\to H$是有界线性算子. 则T是酉算子的充分必要条件是,T是满射且保持范数.

证明 只要证明充分性. 假设T是满射且保持范数,则T是双射,并且对于每一个$x\in H$,

$$(T^*Tx,x)=(Tx,Tx)=(x,x),$$

即$((T^*T-I)x,x)=0$. 由引理 5.5,得到$T^*T=I$. 由于T^{-1}存在,则$T^*=T^*TT^{-1}=T^{-1}$. □

习　题

1. 验证定理 5.3 中的(1),(2)，(5),(6).

2. 若S和T是 Hilbert 空间H上的自伴算子，则对于任意的实数α和β, $\alpha S+\beta T$ 是H上的自伴算子.

3. 设H是复 Hilbert 空间,$T:H\to H$ 是有界线性算子. 令

$$T_1=\frac{1}{2}(T+T^*),\quad T_2=\frac{1}{2i}(T-T^*).$$

证明：(1) T_1和T_2是自伴算子且$T=T_1+iT_2, T^*=T_1-iT_2$.

(2) 唯一性. 即若有自伴算子S_1,S_2，使得$T_1+iT_2=S_1+iS_2$,则必有$T_1=S_1, T_2=S_2$.

4. 设H_1和H_2是 Hilbert 空间，T: $H_1\to H_2$是有界线性算子,$\mathscr{N}(T)$和$\mathscr{R}(T)$分别表示T的零空间和值域. 证明

$$\mathscr{N}(T)=\mathscr{R}(T^*)^{\perp},\mathscr{N}(T^*)=\mathscr{R}(T)^{\perp},$$

$$\overline{\mathscr{R}(T)}=\mathscr{N}(T^*)^{\perp},\overline{\mathscr{R}(T^*)}=\mathscr{N}(T)^{\perp}.$$

5. 设H是复 Hilbert 空间,T: $H\to H$ 是有界线性算子. 证明$T=-T^*$的充分必要条件是,对一切$x\in H$有$\mathrm{Re}(Tx,x)=0$.

6. 设H是 Hilbert 空间,$T:H\to H$ 是有界线性算子. 若$TT^*=T^*T$,则T称为正常算子(normal operator).

(1) 证明自伴算子和酉算子都是正常算子.

(2) 若H是复 Hilbert 空间，则T是正常算子的充分必要条件是,对一切$x\in H$有$\|T^*x\|=\|Tx\|$. 利用此结论证明:当T是正常算子时,$\|T^2\|=\|T\|^2$.

§6　双线性泛函

内积空间X上的内积是$X\times X$到数域$\mathbb{K}$上的一个映射，它对第一个变元是线性的，对第二个变元是共轭线性的. 本节将研究具有这一性质的一类映射,即下面所定义的双线性泛函.

定义 6.1　设X和Y是在同一数域$\mathbb{K}$上的线性空间. 若映射φ: $X\times Y\to\mathbb{K}$ 满足条件:φ对第一个变元是线性的，对第二个变元是共轭线性的,即

$$\varphi(\alpha x_1+\beta x_2, y)=\alpha\varphi(x_1, y)+\beta\varphi(x_2, y),$$
$$\varphi(x, \alpha y_1+\beta y_2)=\bar{\alpha}\varphi(x, y_1)+\bar{\beta}\varphi(x, y_2)$$

(这里 $x, x_1, x_2\in X, y, y_1, y_2\in Y, \alpha, \beta\in\mathbf{K}$)，则 φ 称为 $X\times Y$ 上的双线性泛函(bilinear functional)．当 $X=Y$ 时，我们称 φ 是 X 上的双线性泛函．

从上面的定义我们可以看到，在复空间上 φ 对于第二个变元来说不是线性的，而只是共轭线性的．我们在定义中将 φ 取名为双线性泛函似乎未能很准确地表示其含义，因而在有的书上称它为“一个半”线性泛函．当然在实空间上称 φ 为双线性泛函是名符其实的．

定义 6.2 设 X 和 Y 是内积空间，φ 是 $X\times Y$ 上的双线性泛函．若存在常数 $c>0$ 使得对于任意 $x\in X, y\in Y$

$$|\varphi(x, y)|\leqslant c\|x\|\|y\|,$$

则称双线性泛函 φ 是有界的．这时 φ 的范数定义为

$$\|\varphi\|=\sup_{x\in X\setminus\{\theta\}, y\in Y\setminus\{\theta\}}\frac{|\varphi(x, y)|}{\|x\|\|y\|}. \tag{6.1}$$

易知，有界双线性泛函 φ 的范数 $\|\varphi\|$ 还可以用下面的式子表示：

$$\|\varphi\|=\sup_{\|x\|=1, \|y\|=1}|\varphi(x, y)|=\sup_{\|x\|\leqslant1, \|y\|\leqslant1}|\varphi(x, y)|. \tag{6.2}$$

并且对于任意 $x\in X, y\in Y$，由(6.1)式得到

$$|\varphi(x, y)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|y\|. \tag{6.3}$$

如果 S 是内积空间 X 到内积空间 Y 的线性算子，我们可以定义一个泛函 φ 使得

$$\varphi(x, y)=(Sx, y)\qquad(x\in X, y\in Y). \tag{6.4}$$

显然 $\varphi: X\times Y\to\mathbf{K}$ 是双线性泛函，我们称它为由线性算子 S 导出的双线性泛函．若线性算子 S 是有界的，则算子 S 导出的双线性泛函 φ 也是有界的且 $\|S\|=\|\varphi\|$．事实上，对于 $x\in X$，$y\in Y$，由

Schwarz 不等式

$$|\varphi(x,y)|=|(Sx,y)|\leqslant\|Sx\|\|y\|\leqslant\|S\|\|x\|\|y\|,$$

故 φ 是有界的且 $\|\varphi\|\leqslant\|S\|$. 另一方面，取 $y=Sx$, 由(6.4)及(6.3)式有

$$\|Sx\|^2=|\varphi(x,Sx)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|Sx\|,$$

故 $\|Sx\|\leqslant\|\varphi\|\|x\|$, 从而 $\|S\|\leqslant\|\varphi\|$. 因此 $\|S\|=\|\varphi\|$.

反过来，在 Hilbert 空间中，我们应用§4 中的 Riesz 表示定理可得到有界双线性泛函的表示定理如下.

定理 6.3 设 H_1 和 H_2 是 Hilbert 空间，φ: $H_1\times H_2\to\mathbf{K}$ 是有界双线性泛函. 则存在唯一的有界线性算子 $S: H_1\to H_2$ 使得

(6.5) $$\varphi(x,y)=(Sx,y)\qquad(x\in X,y\in Y),$$

并且 $\|S\|=\|\varphi\|$.

证明 对于固定的 $x\in H_1$, 映射 $y\to\overline{\varphi(x,y)}$ 是有界线性泛函. 应用 Riesz 表示定理，存在唯一的 $z\in H_2$(因而可以将 z 看作是由 x 所唯一确定的)使得 $\overline{\varphi(x,y)}=(y,z)$. 于是

(6.6) $$\varphi(x,y)=(z,y).$$

当 x 在 H_1 中变化时，便可定义一个算子 $S: H_1\to H_2$ 使得

$$Sx=z\qquad(x\in H_1)$$

将 $z=Sx$ 代入(6.6)式便可得到(6.5)式. 我们还需要证明如下几点:

(1) S 是线性的. 事实上，由(6.5)式及 φ 的双线性性，对于每一个 $y\in H_2$ 皆有

$$\begin{aligned}(S(\alpha x_1+\beta x_2),y)&=\varphi(\alpha x_1+\beta x_2,y)\\&=\alpha\varphi(x_1,y)+\beta\varphi(x_2,y)\\&=\alpha(Sx_1,y)+\beta(Sx_2,y)\\&=(\alpha Sx_1+\beta Sx_2,y),\end{aligned}$$

故 $S(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha Sx_1+\beta Sx_2$.

(2) S 是有界的且 $\|S\|=\|\varphi\|$. 事实上,对于任意的 $x\in H_1$,由(6.5)及(6.3)式

$$\|Sx\|^2=|\varphi(x,Sx)|\leqslant\|\varphi\|\|x\|\|Sx\|,$$

故 $\|Sx\|\leqslant\|\varphi\|\|x\|$. 这表明 S 是有界的且 $\|S\|\leqslant\|\varphi\|$. 另一方面,对于 $x\in H_1, y\in H_2$,又有

$$|\varphi(x,y)|=|(Sx,y)|\leqslant\|S\|\|x\|\|y\|,$$

故 $\|\varphi\|\leqslant\|S\|$. 因此 $\|S\|=\|\varphi\|$.

(3) S 是唯一的. 事实上,假若还有一个线性算子 $T: H_1\to H_2$ 使得对于每一个 $x\in H_1, y\in H_2$ 皆有

$$\varphi(x,y)=(Sx,y)=(Tx,y),$$

则必有 $Sx=Tx(x\in H_1)$,从而 $S=T$. □

定理 6.4 设 φ 是 Hilbert 空间 H 上的有界双线性泛函. 若存在 $b>0$ 使得

$$|\varphi(x,x)|\geqslant b\|x\|^2 \qquad (x\in H), \tag{6.7}$$

则存在唯一的 $S\in\mathscr{B}(H,H)$,使得

$$\varphi(x,y)=(Sx,y) \qquad (x,y\in H), \tag{6.8}$$

并且 S 是一个双射, $S^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$.

证明 由定理 6.3 知,存在唯一的有界线性算子 $S: H\to H$ 使得(6.8)式成立. 对于 $x\in H$,有

$$b\|x\|^2\leqslant|\varphi(x,x)|=|(Sx,x)|\leqslant\|Sx\|\|x\|,$$

故 $b\|x\|\leqslant\|Sx\|$. 由第五章§4习题4知,在 S 的值域 $\mathscr{R}(S)$ 上 S^{-1} 存在,并且 $S^{-1}: \mathscr{R}(S)\to H$ 是有界线性算子. 于是 $\mathscr{R}(S)$ 是 H 的闭子空间.

现在只要证明 $\mathscr{R}(S)=H$,从而立即可得 $S^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$. 为此,我们先指出: $\mathscr{R}(S)^{\perp}=\{\theta\}$. 因为若 $x\in\mathscr{R}(S)^{\perp}$,则有

$$0=(Sx,x)=\varphi(x,x)\geqslant b\|x\|^2,$$

从而 $x=\theta$. 由于 $\mathscr{R}(S)$ 是 H 的闭子空间,应用推论 2.10 则可得到

$H=\mathscr{R}(S)\oplus\mathscr{R}(S)^{\perp}=\mathscr{R}(S)$. □

我们可以把内积空间的内积看作为一个特殊的双线性泛函，记为φ_0，即$\varphi_0(x,y)=(x,y)$. 这一特殊的双线性泛函φ_0具有共轭对称性，即$\varphi_0(x,y)=\overline{\varphi_0(y,x)}$. 我们知道，对于 Hilbert 空间$H$上任意的有界线性泛函$f$，由 Riesz 表示定理存在唯一的$y\in H$使得对于每一个$x\in H$有

$$f(x)=(x,y)=\varphi_0(x,y)$$

这也可以看作为由这一特殊的双线性泛函φ_0所确定的一个H^*与H之间的一一对应. 考虑一般的双线性泛函，在满足条件(6.7)的条件下，我们有下面的 Lax-Milgram 定理. 它在线性偏微分方程理论中有很好的应用.

定理 6.5(Lax-Milgram) 设H是 Hilbert 空间，φ是H上的有界双线性泛函. 若存在$b>0$使得

$$|\varphi(x,x)|\geqslant b\|x\|^2 \qquad (x\in H),$$

则对于H上任意的有界线性泛函f，皆存在唯一的$y\in H$使得

$$f(x)=\varphi(x,y) \qquad (x\in H),$$

并且$\|y\|\leqslant\frac{1}{b}\|f\|$.

证明 存在性. 对于任意的有界线性泛函f，由 Riesz 表示定理，存在唯一的$z\in H$使得

$$f(x)=(x,z) \qquad (x\in H), \tag{6.9}$$

并且$\|f\|=\|z\|$. 在假设条件下，定理 6.4 成立，即有界双线性泛函φ可确定一个唯一的$S\in\mathscr{B}(H,H)$，使得

$$\varphi(x,y)=(Sx,y) \qquad (x,y\in H),$$

且$S^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$. 由第六章定理 3.6(3)知，$S$的 Banach 伴随算子$S'$是双射.（关于 Banach伴随算子与 Hilbert 伴随算子的记法见§5中的说明.）因此由(5.5)式$S^*=J_1^{-1}S'J_2$可知，S的

Hilbert 伴随算子 S^* 是双射，从而$\mathscr{R}(S^*)=H$. 对于上述 $z\in H$，则有 $y\in H$ 使得 $z=S^*y$. 于是，每一个 $f\in H^*$ 确定了一个 $y\in H$，使得对于任意的 $x\in H$

$$f(x)=(x,z)=(x,S^*y)=(Sx,y)=\varphi(x,y). \tag{6.10}$$

唯一性. 假若又有 $y_1\in H$ 满足 $f(x)=\varphi(x,y_1)$ $(x\in H)$，则对于任意 $x\in H$ 有

$$0=\varphi(x,y_1)-\varphi(x,y)=\varphi(x,y_1-y).$$

取 $x=y_1-y$，由假设条件则得

$$0=\varphi(y_1-y,y_1-y)\geqslant b\|y_1-y\|^2.$$

故 $\|y_1-y\|=\theta$，从而 $y_1=y$. 唯一性得证.

从上面的证明知，$z=S^*y$ 且 $\|f\|=\|z\|$. 又从(6.10)知

$$(x,S^*y)=\varphi(x,y)\qquad (x\in H).$$

取 $x=y$，则

$$\|S^*y\|\|y\|\geqslant|(y,S^*y)|=|\varphi(y,y)|\geqslant b\|y\|^2.$$

故

$$\|f\|=\|z\|=\|S^*y\|\geqslant b\|y\|,$$

从而 $\|y\|\leqslant\frac{1}{b}\|f\|$. □

习　题

1. 设 X 和 Y 是同一数域 $\mathbf{K}$ 上的内积空间，φ: $X\times Y\to\mathbf{K}$ 是一个双线性泛函. 则下列各条等价.

(a) φ 是连续的.

(b) φ 在点 (θ,θ) 处连续.

(c) φ 是有界的.

注意，这里 φ 在点 (x_0,y_0) 连续可定义为：对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $\|x-x_0\|<\delta$ 且 $\|y-y_0\|<\delta$ 时

$$|\varphi(x,y)-\varphi(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

2. 设φ是线性空间X上的双线性泛函. 证明:

(1) 若X是实线性空间且φ是对称的(即$\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$), 则对于任意$x,y\in X$

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)].$$

(2) 若X是复线性空间, 则

$$\varphi(x,y)=\frac{1}{4}[\varphi(x+y,x+y)-\varphi(x-y,x-y)$$
$$+i\varphi(x+iy,x+iy)-i\varphi(x-iy,x-iy)].$$

3. 设X是复线性空间, φ是X上的双线性泛函. 若对于任意$x,y\in X$皆有

$$\varphi(x,y)=\overline{\varphi(y,x)},$$

则φ称为X上的 Hermite 双线性泛函.

证明: φ是X上的 Hermite 双线性泛函当且仅当, 对于任意的$x\in X$, $\varphi(x,x)$都是实数.

4. 设φ是内积空间X上的 Hermite 双线性泛函. 若存在常数$c\geqslant 0$使得对任意$x\in X$有

$$|\varphi(x,x)|\leqslant c\|x\|^2,$$

则φ是有界的且$\|\varphi\|\leqslant c$.

5. 在定理 6.5 的条件下, 证明: 存在唯一的$T\in\mathscr{B}(H,H)$, 使得T^{-1}存在, $T^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$, 并且满足

$$(x,y)=\varphi(x,Ty)\quad (x,y\in H).$$

还可以进一步得到, $\|T\|\leqslant\frac{1}{b}$且$\|T^{-1}\|=\|\varphi\|$.

第八章　谱　　论

谱论是泛函分析的一个重要的分支．算子谱论的研究与求算子的逆算子问题有密切的关系．在讨论很多类型的方程（如微分方程，积分方程等）的时候，总是需要研究方程的解的存在性、唯一性等问题．对这些问题的研究及得到的成果，例如 Fredholm 在求解线性积分方程方面的著名理论，促进了算子谱论的发展，同时也显示了算子谱论在这些研究领域中广泛而成功的应用．另外，算子的谱论对于认识算子本身的特征也是非常重要的．

我们知道，有限维赋范空间到有限维赋范空间上的线性算子对应于一个矩阵，而矩阵特征值的理论在求解线性方程组中具有重要作用．在本章中，我们将推广矩阵特征值的概念，介绍 Banach 空间上的有界线性算子的谱的基本概念，基本性质以及紧算子和它的谱．算子的谱论包含丰富的内容和广泛的应用．本章仅仅是一个简要的介绍．

在本章关于算子谱论的研究中，我们总假定所讨论的空间是复的．

§1　谱的基本概念

在很多类型的代数方程、微分方程、积分方程的理论中，研究解的存在性及唯一性是一个重要的课题．用泛函分析的观点，我们可考虑具有更一般形式的泛函方程：

(1.1)　　$\lambda x - Tx = y$　或者　$(\lambda I - T)x = y$,

其中 T 是赋范空间 X 到其自身的有界线性算子，I 表示 X 上的恒

等算子，$x, y\in X$（x 看作为未知元素，y为已知元素），$\lambda\in\mathbb{K}$是一个参数．我们的目的在于研究泛函方程(1.1)的解 x 的存在性、唯一性以及对 y 的连续依赖性等问题，或者说，在于研究有界线性算子 $\lambda I-T$ 的逆算子是否存在以及此逆算子是否在 X 上有界的问题．

例如，Fredholm 积分方程

$$x(t)-\lambda\int_a^b K(t,s)x(s)ds=y(t)\quad (t\in[a,b]),$$

其中 $K(t,s)$是$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，$y\in C[a,b]$．我们研究解 $x\in C[a,b]$ 的存在性及唯一性．应用压缩映射定理我们可得到：当参数 λ 的绝对值很小时，解 x 存在且唯一（见第二章定理7.8）．当 λ 的绝对值不是很小时，我们还需要作进一步的讨论．

又如，当X是有限维赋范空间时，例如 $\dim X=n$，并设$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是X的一组基．X 到其自身的线性算子对应于一个 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$，因而可认为 A就是此线性算子．于是方程 (1.1)具有如下的形式

$$(\lambda I-A)x=y. \tag{1.2}$$

若记 $x=\xi_1e_1+\cdots+\xi_ne_n, y=\eta_1e_1+\cdots+\eta_ne_n$，则方程(1.2)可化为以 $\xi_1,\cdots,\xi_n$ 为未知变量的线性非齐次方程组

$$\text{(1.2)}'\qquad \begin{cases}(\lambda-a_{11})\xi_1-a_{12}\xi_2-\cdots-a_{1n}\xi_n=\eta_1\\ -a_{21}\xi_1+(\lambda-a_{22})\xi_2-\cdots-a_{2n}\xi_n=\eta_2\\ \cdots\cdots\\ -a_{n1}\xi_1-a_{n2}\xi_2-\cdots+(\lambda-a_{nn})\xi_n=\eta_n\end{cases}$$

按照线性代数中熟知的方法，我们考虑(1.2)对应的齐次方程

$$(\lambda I-A)x=\theta, \tag{1.3}$$

或者相应于 (1.2)$'$ 的线性齐次方程组．若参数 λ 使得齐次方程(1.3)有非零解，则 λ 称为 A 的特征值．这时 λ 实际上就是(1.3)对应的行列式

$$(1.4)\qquad \begin{vmatrix} \lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots\cdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

的根.根据线性代数中熟知的结论我们得到：若λ是A的特征值，则λ满足(1.4)，于是(1.3)有非零解，即$\lambda I-A$不存在逆算子；反之，若λ不是A的特征值，则λ不满足(1.4)，这时(1.3)仅有唯一的零解，于是$\lambda I-A$存在逆算子$(\lambda I-A)^{-1}$，它是定义在X上的有界线性算子，对于每一个$y\in X$都有唯一的解$x=(\lambda I-A)^{-1}y$.因此研究A的特征值的问题与研究算子$\lambda I-A$的逆算子存在的问题，即(1.2)的解的存在及唯一性的问题密切相关.

推广到一般的复 Banach 空间，我们给出下面的定义.(当然也可以在复赋范空间中给出有关的定义.)在算子谱论中，我们总是假定所讨论的空间是复的(除非另有说明)，并且含有非零元.

定义 1.1 设X是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$，$\lambda\in\mathbb{C}$.

(1) 若$\lambda I-T$有在X上定义的有界逆算子，即$(\lambda I-T)^{-1}$是X上的有界线性算子，则λ称为T的正则值(regular value).T的正则值的全体称为T的正则集(regular set)，或称为T的豫解集(resolvent set)，记为$\rho(T)$.当$\lambda\in\rho(T)$时，$(\lambda I-T)^{-1}$称为T的豫解算子(resolvent operator)或简称为T的豫解式(resolvent).

(2) $\rho(T)$关于复平面$\mathbb{C}$的余集记为$\sigma(T)$，即$\sigma(T)=\mathbb{C}\backslash\rho(T)$.$\sigma(T)$称为$T$的谱(spectrum).当$\lambda\in\sigma(T)$时，$\lambda$称为$T$的谱点或谱值(spectral value)，这时$\lambda I-T$不存在定义在X上的有界逆算子.

显然，$\mathbb{C}=\rho(T)\cup\sigma(T)$.$T$的谱点可以分为以下三种类型.

(a) 对于$\lambda\in\sigma(T)$，若算子$\lambda I-T$不是可逆的，即方程$(\lambda I-T)x=\theta$有非零解，则λ称为T的特征值(eigenvalue)，而特征值λ对

应的方程$(\lambda I-T)x=\theta$的非零解x称为对应于特征值λ的特征向量(eigenvector). T的特征值λ的全体称为T的点谱(point spectrum)，记为$\sigma_p(T)$.

当λ为特征值时，

$$E_\lambda(T)=\{x\in X\mid(\lambda I-T)x=\theta\}$$

称为算子T对应于特征值λ的特征向量空间(eigenspace). 这时$E_\lambda(T)$是算子$\lambda I-T$的零空间，即$E_\lambda(T)=\mathscr{N}(\lambda I-T)$. 或者说，$E_\lambda(T)$是由算子$T$对应于$\lambda$的特征向量的全体及零元素$\theta$组成的.

(*b*) 对于$\lambda\in\sigma(T)$，若算子$\lambda I-T$是可逆的，即方程$(\lambda I-T)x=\theta$只有零解，然而$\lambda I-T$的值域$\mathscr{R}(\lambda I-T)(=\mathscr{D}((\lambda I-T)^{-1}))$在$X$中稠密但不等于$X$，则这些$\lambda$的全体称为算子$T$的连续谱(continuous spectrum)，记为$\sigma_c(T)$.

(*c*) 对于$\lambda\in\sigma(T)$，若算子$\lambda I-T$是可逆的，然而$\lambda I-T$的值域$\mathscr{R}(\lambda I-T)$在X中不稠密，则这些λ的全体称为算子T的剩余谱(residual spectrum)，记为$\sigma_r(T)$.

在Banach空间X中，当$\lambda\in\sigma_c(T)$时，必然有$\mathscr{R}(\lambda I-T)\neq X$. 因为假若$\mathscr{R}(\lambda I-T)=X$，则由逆算子定理（第六章定理6.7)知$\lambda\in\rho(T)$，得到矛盾. 显然，$\sigma(T)$正是互不相交的三个集$\sigma_p(T)$，$\sigma_c(T)$，$\sigma_r(T)$之并.

例1 设X是有限维赋范空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 那末$\sigma(T)=\sigma_p(T)$. 换句话说，λ不是T的特征值就必是T的正则值. 这正是我们在定义1.1之前已经讨论过的结论.

例2 在复$C[0,1]$中定义算子T: $C[0,1]\to C[0,1]$使得对于每一个$x\in C[0,1]$

$$(1.5)\qquad (Tx)(t)=\int_0^t x(s)\,ds\qquad (t\in[0,1]).$$

由第五章§4例3知，T是有界线性算子且$\|T\|=1$.

当 $\lambda \neq 0$ 时，考虑方程 $(\lambda I-T)x=y$，即

$$\lambda x(t)-\int_0^t x(s)ds=y(t).$$

它等价于方程

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda}\int_0^t x(s)ds. \tag{1.6}$$

由第二章§7例4知，方程(1.6)对于任意 $y\in C[0,1]$ 存在唯一的解. 故 $\lambda I-T$ 存在定义在 $C[0,1]$ 上的逆算子 $(\lambda I-T)^{-1}$. 因 $C[0,1]$ 是完备的，应用逆算子定理，则得到 $(\lambda I-T)^{-1}$ 是有界的. 由此可见，任何非零复数 λ 都是 T 的正则值.

当 $\lambda=0$ 时，由(1.5)可以看出，T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 中的任意一个元素 y 皆满足条件 $y(0)=0$. 因此 $\mathscr{R}(T)$ 在 $C[0,1]$ 中不稠密. 其次，由 $(Tx)(t)=\int_0^t x(s)ds=0$ 立即可知 $x(t)=0(t\in[0,1])$，即 $x=\theta$. 故 $\lambda=0$ 不是 T 的特征值. 因此 $\lambda=0$ 属于 T 的剩余谱.

习　题

1. 设 $X=C[0,1]$. 定义算子 $T: X\to X$ 使得对于每一个 $x\in X$

$$(Tx)(t)=tx(t)\quad(t\in[0,1]).$$

证明: T 没有特征值且 $\sigma(T)=\sigma_r(T)=[0,1]$.

2. 设 $X=C[0,1]$. 取定 $v\in C[0,1]$，定义算子 T: $X\to X$ 使得对于每一个 $x\in X$

$$(Tx)(t)=v(t)x(t)\quad(t\in[0,1]).$$

证明: T 没有特征值且 $\sigma(T)=\{v(t)\mid t\in[0,1]\}$.

3. 求一个有界线性算子 $T: C[0,1]\to C[0,1]$，使得 $\sigma(T)$ 等于一个给定的闭区间 $[a,b]$.

4. 设 Y 是赋范空间 X 的子空间，T: $X\to Y$ 是线性算子. 若 $T(Y)\subset Y$，则称 Y 关于算子 T 是不变的. 证明 T 的特征向量空间关于 T 是不变的.

§2 有界线性算子谱的基本性质

在本节中，我们讨论在复 Banach 空间上的有界线性算子的谱的性质.

定理 2.1 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 若 $\|T\|<1$，则 $(I-T)^{-1}$ 存在，它是定义在全空间 X 上的有界线性算子，并且

$$(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n=I+T+T^2+\cdots, \tag{2.1}$$

(这里，级数按 $\mathscr{B}(X,X)$ 中的范数收敛)，同时

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{1-\|T\|}.$$

证明 由于 $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$，当 $\|T\|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|T^n\|$ 收敛. 因 X 是 Banach 空间，于是 $\mathscr{B}(X,X)$ 是 Banach 空间，故由级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}T^n$ 绝对收敛可推出此级数收敛(见第五章 §2 习题 4). 设此级数按 $\mathscr{B}(X,X)$ 的范数收敛于 $S\in\mathscr{B}(X,X)$. 剩下只需证明 $S=(I-T)^{-1}$. 事实上，容易验证

$$\begin{aligned}(I-T)(I+T+\cdots+T^n)\\=(I+T+\cdots+T^n)(I-T)=I-T^{n+1}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

因 $\|T\|<1$，令 $n\to\infty$ 则 $\|T^{n+1}\|\leqslant\|T\|^{n+1}\to0$，即 T^{n+1} 趋于零算子. 故由(2.2)式可得

$$(I-T)S=S(I-T)=I$$

这表明 $S=(I-T)^{-1}$，即 $(I-T)^{-1}=I+T+T^2+\cdots$. 由此可得

$$\|(I-T)^{-1}\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\|T\|^n=\frac{1}{1-\|T\|}.$$ □

定理 2.2 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$，则 T 的正则集 $\rho(T)$ 是开集，从而 T 的谱 $\sigma(T)$ 是闭集.

证明 若 $\rho(T)=\varnothing$，则 $\rho(T)$ 是开集.（我们将在定理 2.3中看到，实际上 $\rho(T)\neq\varnothing$.）

若 $\rho(T)\neq\varnothing$，取 $\lambda_0\in\rho(T)$. 对任意的复数 λ，有

$$\begin{aligned}\lambda I-T&=(\lambda_0 I-T)+(\lambda-\lambda_0)I\\&=[I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}](\lambda_0 I-T).\end{aligned}$$

记 $S=I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}$. 由于 $\lambda_0\in\rho(T)$，$0\neq(\lambda_0 I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X,X)$，应用定理 2.1，当 λ 满足

$$|\lambda-\lambda_0|<\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}$$

时，即 $\|-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-T)^{-1}\|<1$ 时，S 的逆 S^{-1} 存在并且是有界的. 考察 $\lambda I-T=S(\lambda_0 I-T)$，其右端的两个算子 $\lambda_0 I-T$ 及 S 的逆算子都存在且有界，故 $\lambda I-T$ 的逆算子也存在且

$$(\lambda I-T)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}S^{-1}$$

是有界的. 综上所述，存在 λ_0 的邻域

$$U(\lambda_0)=\{\lambda\mid|\lambda-\lambda_0|\leqslant\|(\lambda_0 I-T)^{-1}\|^{-1}\},$$

使得 $U(\lambda_0)\subset\rho(T)$. 由 λ_0 的任意性得到 $\rho(T)$ 是开集，从而 $\sigma(T)$ 是闭集. □

定理 2.3 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$，则 $\sigma(T)$ 是复平面$\mathbf{C}$上的有界闭集（从而是紧集），并且对每一个 $\lambda\in\sigma(T)$ 必有

$$|\lambda|\leqslant\|T\|.$$

由此可知 $\rho(T)\neq\varnothing$.

证明 由定理 2.2，我们只须证 $\sigma(T)$ 有界. 为此我们只要证明 $\sigma(T)\subset\{\lambda\mid|\lambda|\leqslant\|T\|\}$，或者只要证明它的等价的结论：

(2.3) $$\{\lambda\mid|\lambda|>\|T\|\}\subset\rho(T).$$

事实上，当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，$\left\|\frac{1}{\lambda}T\right\|<1$. 由定理2. 1，

$$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}T\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^{n}\in\mathscr{B}(X,X),$$

故 $\lambda\in\rho(T)$. 因此(2.3)得证. 余下部分的证明是显然的. □

应该指出，根据上面定理的证明，我们可将定理 2.1 推广到更为一般的情形. 设 X 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 当 $|\lambda|>\|T\|$ 时，应用定理 2.1 我们不仅得到有界线性算子 $(\lambda I-T)^{-1}$ 可以展开为如下的级数

$$(\lambda I-T)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^{n}=\frac{1}{\lambda}I+\frac{1}{\lambda^2}T+\frac{1}{\lambda^3}T^2+\cdots,$$

而且还可知它的范数满足不等式

$$\|(\lambda I-T)^{-1}\|\leqslant\frac{1}{|\lambda|-\|T\|}.$$

定理 2.4 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$.

(1) 若 λ 是 T 的特征值，则对应于 λ 的特征向量空间 $E_\lambda(T)$ 是 X 的闭子空间。

(2) 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 T 的 n 个不同的特征值，x_k 是对应于 λ_k 的一个特征向量($k=1,\cdots,n$)，则$\{x_1,\cdots,x_n\}$线性无关。

证明 (1) T 对应于λ的特征向量空间 $E_\lambda(T)$就是算子$\lambda I-T$ 的零空间. 当 T 是有界线性算子时，$\lambda I-T$ 也是有界线性算子. 而有界线性算子 $\lambda I-T$ 的零空间是 X 的闭子空间，故 $E_\lambda(T)$是X的闭子空间.

(2) 由特征向量的定义 $x_k\neq\theta$ ($k=1,\cdots,n$). 我们用归纳法证明$\{x_1,\cdots,x_n\}$ 线性无关. 显然$\{x_1\}$ 线性无关. 现设$\{x_1,\cdots,x_k\}$ 线性无关. 要证$\{x_1,\cdots,x_{k+1}\}$线性无关. 假若$\{x_1,\cdots,x_{k+1}\}$线性相关，则 x_{k+1} 可以表示为 $x_1,\cdots,x_k$ 的线性组合，即

(2.4) $$x_{k+1}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_kx_k.$$

由于 x_{k+1} 是对应于 λ_{k+1} 的特征向量，故

$$(\lambda_{k+1}I-T)x_{k+1}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\lambda_{k+1}I-T)x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)x_i=\theta.$$

由于$\{x_1,\cdots,x_k\}$线性无关，我们得到

$$\alpha_i(\lambda_{k+1}-\lambda_i)=0\quad(i=1,\cdots,k).$$

而$\lambda_{k+1}-\lambda_i\neq0$，故$\alpha_i=0(i=1,\cdots,k)$. 由(2.4)知$x_{k+1}=\theta$，得到矛盾. 因此$\{x_1,\cdots,x_{k+1}\}$线性无关. 应用归纳法，结论(2)得证. □

注 在定理2.4中，X完备的假设仅由于特征值和特征向量的定义中假设了X完备的条件(见定义1.1)，除此之外，在定理2.4的证明中并未用到此条件.

从定理2.3我们知道，在复Banach空间上的有界线性算子T的谱$\sigma(T)$是有界的. 另外，我们还应指出$\sigma(T)\neq\varnothing$(证明从略). 由此自然会提出这样一个问题，如何求得一个以原点为中心的包含整个谱$\sigma(T)$的最小闭圆域？下面我们先介绍一个概念.

定义2.5 设X是复Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 令

$$r_\sigma(T)=\sup_{\lambda\in\sigma(T)}|\lambda|.$$

我们称$r_\sigma(T)$为算子T的谱半径(spectral radius).

由定义可知，算子T的谱半径$r_\sigma(T)$就是以原点为中心包含$\sigma(T)$的最小闭圆域的半径. 定理2.3给出了谱半径的估计式$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|$. 谱半径的准确表达式可由下面的定理给出.

定理2.6 设X是复Banach空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$，则

$$r_\sigma(T)=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}.$$

证明略.

习　题

1. 在 $C[0,1]$ 中考虑算子方程

$$(I+T)x=y, \tag{2.5}$$

其中 $x, y\in C[0,1]$，算子 T 定义为

$$(Tx)(t)=\frac{1}{10}\int_0^1 e^{ts}x(s)ds \quad (x\in C[0,1], t\in[0,1]).$$

证明算子方程(2.5)对于任给的 $y\in C[0,1]$ 有唯一的解 $x\in C[0,1]$.

2. 设算子 $T: l^2\to l^2$ 定义为

$$T(\xi_1,\xi_2,\cdots)=(0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

这里 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots)\in l^2$. T 称为右移算子. 证明 T 没有特征值且 $\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|>1\}$.

3. 设算子 $T: l^p\to l^p$ $(1\leqslant p<\infty)$ 定义为

$$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots),$$

这里 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\cdots)\in l^p$. T 称为左移算子. 证明

$$\rho(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|>1\},$$
$$\sigma_p(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} \mid |\lambda|<1\}.$$

4. 设 F 是复平面 $\mathbb{C}$ 的紧子集，$\{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ 是 F 的稠密子集. 定义算子 $T: l^2\to l^2$ 使得对于每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$

$$Tx=(\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,\alpha_3\xi_3,\cdots).$$

试证明:

$$\sigma(T)=F,$$
$$\sigma_p(T)=\{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\},$$
$$\sigma_c(T)=F\setminus\{\alpha_n \mid n\in\mathbb{N}\}.$$

5. 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$ 且 $\lambda,\mu\in\rho(T)$. 证明

$$(\lambda I-T)^{-1}-(\mu I-T)^{-1}=(\mu-\lambda)(\lambda I-T)^{-1}(\mu I-T)^{-1}.$$

6. 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X, X)$ 且 $\lambda\in\rho(T)$. 对于任意的 $S\in\mathscr{B}(X,X)$，若 T 与 S 可交换，则 $(\lambda I-T)^{-1}$ 与 S 可交换，即

$$(\lambda I-T)^{-1}S=S(\lambda I-T)^{-1}.$$

7. 设 X 是复 Banach 空间，$S,T\in\mathscr{B}(X, X)$. 证明对于任意的 $\lambda\in\rho(S)\cap\rho(T)$

$$(\lambda I-S)^{-1}-(\lambda I-T)^{-1}=(\lambda I-S)^{-1}(S-T)(\lambda I-T)^{-1}.$$

若加上 S 与 T 可交换的条件，则

$$(\lambda I-S)^{-1}-(\lambda I-T)^{-1}=(S-T)(\lambda I-S)^{-1}(\lambda I-T)^{-1}.$$

8. 设 X 是复 Banach 空间，$S,T\in\mathscr{B}(X,X)$ 且 $ST=TS$. 证明

$$r_\sigma(ST)\leqslant r_\sigma(S)r_\sigma(T).$$

9. 设 X 是复 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}(X,X)$. 若 T 满足

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|T^n\|}=0,$$

则 T 称为拟幂零算子(quasi-nilpotent operator). 证明：若算子 T 是拟幂零算子，则 $\sigma(T)=\{0\}$.

10. 设 X 是复 Banach 空间，$T_n\in\mathscr{B}(X,X)$ $(n\in\mathbf{N})$. 若 $\{T_n\}$ 按算子范数收敛于 $T\in\mathscr{B}(X,X)$，λ_0 是 T 的正则值，则当 n 充分大时，λ_0 也是 T_n 的正则值，且

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda_0 I-T_n)^{-1}=(\lambda_0 I-T)^{-1}.$$

§3 紧算子

考虑如下的积分方程

$$(\lambda I-T)x(t)=y(t), \tag{3.1}$$

这里 $(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$，参数 $\lambda\in\mathbf{C}$，($\lambda\neq 0$ 时，(3.1) 称为第二类型的 Fredholm 方程；$\lambda=0$ 时，(3.1) 称为第一类型的 Fredholm 方程.) 核 $K(t,s)$ 满足一定的条件，x 是未知函数. F. Riesz (1918) 和 J. Schauder (1930) 成功地把 Fredholm 关于线性积分方程的理论拓广为关于紧算子的算子方程 $(\lambda I-T)x=y$ 的一系列理论，称之为 Riesz-Schauder 理论. 它使得 Fredholm 的理论清楚、简洁地展现出来.

在本节中，我们先讨论紧算子及其性质.

定义 3.1 设 X 和 Y 是赋范空间，T: $X\to Y$ 是线性算子. 若对于每一个 X 的有界子集 M，$T(M)$ 是 Y 中的列紧集，则 T 称为紧线性算子 (compact linear operator)，或称为全连续算子

(completely continuous linear operator)，简称为紧算子.

下面，我们给出紧算子的一些特征和性质.

引理 3.2 设X和Y是赋范空间，T: $X\to Y$ 是线性算子.

(1) T 是紧算子当且仅当对于每一个X的有界子集M，$\overline{T(M)}$是Y中的紧集.

(2) 若 T 是紧算子，则 T 是连续的.

证明 (1) 充分性是明显的. 现证必要性. 设$\{y_n\}\subset\overline{T(M)}$. 对于每一个 $n\in\mathrm{N}$，存在 $x_n\in M$ 使得

$$\|y_n-Tx_n\|<\frac{1}{n}.$$

由于 T 是紧算子，则$\{x_n\}$有一个子序列$\{x_{n_j}\}$使得 $Tx_{n_j}\to y\in Y$. 于是得到 $y\in\overline{T(M)}$. 由三角不等式

$$\|y_{n_j}-y\|\leqslant\|y_{n_j}-Tx_{n_j}\|+\|Tx_{n_j}-y\|$$

可知，$\{y_n\}$的子序列$\{y_{n_j}\}$ 收敛于 y. 因此 $\overline{T(M)}$ 是紧集.

(2) X 中的单位球面 $S=\{x\in X\mid\|x\|=1\}$是有界的. 因 T 是紧算子，故$\overline{T(S)}$ 是Y中的紧集. 根据第二章定理 8.2, $\overline{T(S)}$ 是有界的，即

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|<\infty.$$

因此 T 是有界的，或者说 T 是连续的. □

下面的例子表明连续的线性算子不一定是紧算子.

例1 设 X 是无限维赋范空间, 那末恒等算子 I: $X\to X$ 显然是连续的, 但 I 不是紧算子. 因为在无限维空间中, 单位闭球 $M=\{x\in X\mid\|x\|\leqslant 1\}$不是紧集(见第五章定理3.8)，因此$I(M)=M$ 不是列紧集.

定理 3.3 设X和Y是赋范空间，T: $X\to Y$ 是线性算子.

(1) 若 T 是有界的且 $\dim T(X)<\infty$，则 T 是紧算子.

(2) 若 $\dim X<\infty$，则 T 是紧算子.

证明 (1) 设M是X中任一有界集. 由于T是有界的，则$T(M)$是$T(X)$中的有界集. 由假设$T(X)$是有限维的，故$T(M)$是$T(X)$中的列紧集(见第五章定理3.6)，从而$T(M)$是Y中的列紧集.

(2) 设$\dim X<\infty$，则T是有界的 (见第五章定理5.1). 而$T(X)$也是有限维的(见第五章§1习题6)，故由(1)知，T是紧算子. □

定理 3.4 设$\{T_n\}$是赋范空间X到Banach空间Y的一列紧算子. 若$\{T_n\}$一致收敛于T(即$\|T_n-T\|\to 0$)，则T也是紧算子.

证明 设$\{x_m\}$是X中的有界序列. 我们用对角线方法在$\{Tx_m\}$中选取一个收敛子序列

因T_1是紧算子，故存在$\{x_m\}$的子序列$\{x_{1,m}\}$使得$\{T_1x_{1,m}\}$收敛. 又因T_2是紧算子，故存在$\{x_{1,m}\}$的子序列$\{x_{2,m}\}$使得$\{T_2x_{2,m}\}$收敛. 如此继续下去，可从$\{x_{n,m}\}$中选出子序列$\{x_{n+1,m}\}$使得$\{T_{n+1}x_{n+1,m}\}$收敛. 选取对角线序列$\{x_{m,m}\}$，则它是$\{x_m\}$的子序列，并且对于每一个固定的正整数n，序列$\{T_nx_{m,m}\}$收敛.

由于$\{x_m\}$是有界的，可设存在$c>0$使得$\|x_m\|\leqslant c(m\in\mathbb{N})$. 于是$\|x_{m,m}\|\leqslant c(m\in\mathbb{N})$. 对于任意的$\varepsilon>0$，由于$T_n\to T$，则存在正整数$N$使得

$$\|T_N-T\|<\frac{\varepsilon}{3c}.$$

因收敛序列$\{T_Nx_{m,m}\}_{m\in N}$是Cauchy序列，故对于上述任意的$\varepsilon>0$存在正整数N_1，使得当$p,q>N_1$时

$$\|T_Nx_{p,p}-T_Nx_{q,q}\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当$p,q>N_1$时，

$$\|Tx_{p,p}-Tx_{q,q}\|\leqslant\|Tx_{p,p}-T_Nx_{p,p}\|$$

$$+\|T_N x_{p,p}-T_N x_{q,q}\|+\|T_N x_{q,q}-T x_{q,q}\|$$
$$\leqslant\|T-T_N\|(\|x_{p,p}\|+\|x_{q,q}\|)+\frac{\varepsilon}{3}$$
$$<\frac{\varepsilon}{3c}(c+c)+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

故$\{Tx_{m,m}\}$是 Cauchy 序列．而Y是完备的，则 $\{Tx_m\}$ 的子序列$\{Tx_{m,m}\}$是收敛的．因此T是紧算子． □

记$\mathscr{B}_c(X,Y)$为赋范空间X到赋范空间Y的紧线性算子的全体组成的集．由引理 3.2 知，$\mathscr{B}_c(X,Y)\subset\mathscr{B}(X,Y)$．我们还可以进一步得到如下结论．

定理 3.5 设X和Y是赋范空间，则

(1) $\mathscr{B}_c(X,Y)$是$\mathscr{B}(X,Y)$的线性子空间；

(2) 若Y是 Banach 空间，则$\mathscr{B}_c(X,Y)$是$\mathscr{B}(X,Y)$的闭子空间，从而$\mathscr{B}_c(X,Y)$是 Banach 空间．

证明 留作习题．

例 2 设算子T：$C[a,b]\to C[a,b]$定义为

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\quad(x\in C[a,b]),$$

其中$K(t,s)$是$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，则T是紧算子．

我们容易看出，T是线性的．对于$x\in C[a,b]$，由

$$\|Tx\|=\max_{t\in[a,b]}\left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right|$$
$$\leqslant\|x\|\max_{t\in[a,b]}\int_a^b|K(t,s)|\,ds$$

可知T是有界的．现证T是紧算子．设M是$C[a,b]$中的有界集，即存在$c>0$，使得$\|x\|\leqslant c\,(x\in M)$．于是$\|Tx\|\leqslant\|T\|c\,(x\in M)$，即$T(M)$是有界的．由于核$K(t,s)$是紧集$[a,b]\times[a,b]$上的连续函数，从而是一致连续的．则对于任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得当$s\in[a,b]$，$|t_1-t_2|<\delta$时

$$|K(t_1,s)-K(t_2,s)|<\frac{\varepsilon}{(b-a)c}.$$

因此,对于每一个 $x\in M$,当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时

$$\begin{aligned}|(Tx)(t_1)-(Tx)(t_2)| &= \left|\int_a^b (K(t_1,s)\right.\\ &\qquad \left. -K(t_2,s))\,x(s)ds\right|\\ &< (b-a)\frac{\varepsilon}{(b-a)c}c=\varepsilon.\end{aligned}$$

这表明 $T(M)$ 是等度连续的. 由 Arzela-Ascoli 定理 (第二章定理 8.6)知,$T(M)$ 是 $C[a,b]$ 中的列紧集. 因此 T 是紧算子.

定理 3.6 设 X 是赋范空间,$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$,$S\in\mathscr{B}(X,X)$,则 $TS\in\mathscr{B}_c(X,X)$ 且 $ST\in\mathscr{B}_c(X,X)$.

证明 设 M 是 X 中的有界集,则 $S(M)$ 是 X 中的有界集, 于是 $TS(M)=T(S(M))$ 是 X 中的列紧集. 故 TS 是紧算子.

由于 T 是紧算子,则 $T(M)$ 是列紧集. 因 S 连续,故 $ST(M)=S(T(M))$ 是 X 中的列紧集。 □

定理 3.7 设 X 和 Y 是赋范空间. 若 $T\in\mathscr{B}_c(X,Y)$, 则 T 的值域 $\mathscr{R}(T)$ 在 Y 中是可分的.

证明 对于以零元素 θ 为中心、n 为半径的开球 $B_n=B(\theta,n)\subset X\ (n\in\mathbb{N})$,因 T 是紧算子,故 $C_n=T(B_n)$ 是列紧集. 而列紧集是可分的(见第二章定理 8.10 及引理 8.9),故 C_n 是可分的($n\in\mathbb{N}$).

由于 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ 以及

$$\mathscr{R}(T)=T(X)=\bigcup_{n=1}^{\infty}T(B_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n,$$

因此 $\mathscr{R}(T)$ 是可分的. □

定理 3.8 设 X 和 Y 是赋范空间. 若 $T\in\mathscr{B}_c(X,Y)$, 则 T 把

X中的弱收敛点列映为Y中的强收敛点列.

证明 设X中的点列$\{x_n\}$弱收敛于$x_0\in X$. 容易看出，$\{Tx_n\}$在Y中弱收敛于Tx_0. 我们证明$\{Tx_n\}$强收敛于Tx_0. 假若此结论不成立,则存在$\varepsilon_0>0$以及$\{x_n\}$的子序列$\{x_{n_k}\}$使得

$$\|Tx_{n_k}-Tx_0\|\geqslant\varepsilon_0 \qquad (k\in\mathrm{N}).$$

由第六章引理5.2，弱收敛序列是有界的，于是$\{x_{n_k}\}$是有界的. 由假设T是紧算子，则$\{Tx_{n_k}\}$有一个收敛的子序列，设其为$\{y_j\}$，并设$\{y_j\}$收敛于y_0. 由此可知$\{y_j\}$弱收敛于y_0. 由弱极限的唯一性,得到$y_0=Tx_0$. 这样,我们得到了如下的矛盾:

$$\|y_j-y_0\|\to 0 \quad 且\|y_j-y_0\|\geqslant\varepsilon_0.$$

定理得证. □

定理3.9 设X和Y是赋范空间，X^*和Y^*是它们的对偶空间. 若$T:X\to Y$是紧算子,则伴随算子$T^*:Y^*\to X^*$也是紧算子.

证明 设B是Y^*中的任一有界集,并设

$$\|g\|\leqslant c \qquad (g\in B).$$

(1) 我们证明$T^*(B)$是X^*中的完全有界集. 为此，对于任意的$\varepsilon>0$须证$T^*(B)$有一个有限ε-网.

记X中的单位闭球为M，即$M=\{x\in X\mid\|x\|\leqslant 1\}$. 由于$T$是紧算子,则$T(M)$是列紧的,从而它是完全有界的. 对于$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{4c}$, $T(M)$中有一个有限ε_1-网,设其为$\{Tx_1,\cdots,Tx_n\}$，这里$x_i\in M(i=1,\cdots,n)$. 于是,对于任意$x\in M$存在$i\in\{1,\cdots,n\}$,使得

$$\|Tx-Tx_i\|<\frac{\varepsilon}{4c}. \tag{3.1}$$

定义线性算子$S:Y^*\to\mathrm{R}^n$使得对于每一个$g\in Y^*$

$$Sg=(g(Tx_1),\cdots,g(Tx_n)). \tag{3.2}$$

因g和T都是有界的,故S是有界的. 由于$\dim S(Y^*)\leqslant n$，应用

定理 3.3(1)，我们可知 S 是紧算子. 因 B 有界，故 $S(B)$ 是列紧集，从而是完全有界集. 因此 $S(B)$ 有一个 $\frac{\varepsilon}{4}$-网，设其为 $\{Sg_1,\cdots,Sg_m\}$，这里 $g_i\in B(i=1,\cdots,m)$. 于是，对于任意 $g\in B$ 存在 $k\in\{1,\cdots,m\}$，使得

$$\|Sg-Sg_k\|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.3}$$

(注意这里的范数是 $\mathbf{R}^n$ 中的范数). 下面我们证明 $\{T^*g_1,\cdots,T^*g_m\}$ 是 $T^*(B)$ 的 ε-网. 事实上，对于任意 $x\in M$ 必存在 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 使得(3.1)成立；对于任意 $g\in B$ 必存在 $k\in\{1,\cdots,m\}$ 使得(3.3)成立. 故由(3.2)对于每一个 $i\in\{1,\cdots,n\}$ 有

$$|g(Tx_i)-g_k(Tx_i)|^2\leqslant\sum_{j=1}^{n}|g(Tx_j)-g_k(Tx_j)|^2$$
$$=\|Sg-Sg_k\|^2<\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2.$$

综上所证，我们得到

$$\begin{aligned}|g(Tx)-g_k(Tx)|&\leqslant|g(Tx)-g(Tx_i)|\\&\quad+|g(Tx_i)-g_k(Tx_i)|\\&\quad+|g_k(Tx_i)-g_k(Tx)|\\&<\|g\|\|Tx-Tx_i\|+\frac{\varepsilon}{4}\\&\quad+\|g_k\|\|Tx_i-Tx\|\\&<c\frac{\varepsilon}{4c}+\frac{\varepsilon}{4}+c\frac{\varepsilon}{4c}=\frac{3}{4}\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，对于任意 $g\in B$ 存在 $k\in\{1,\cdots,m\}$，使得

$$\|T^*g-T^*g_k\|=\sup_{\|x\|=1}|(T^*(g-g_k))(x)|$$
$$=\sup_{\|x\|=1}|g(Tx)-g_k(Tx)|<\varepsilon.$$

这表明$\{T^*g_1,\cdots,T^*g_m\}$是$T^*(B)$的有限ε-网.

(2) $\overline{T^*(B)}$是X^*中的完全有界集. 事实上, 对于任意的$\varepsilon>0$, 由(1)$T^*(B)$有一个有限$\frac{\varepsilon}{2}$-网, 设其为$H=\{h_1,\cdots,h_n\}$. 对于任一$g\in\overline{T^*(B)}$, 则存在$g_0\in T^*(B)$使得$\|g-g_0\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 而对此$g_0$又存在$h_k\in H$使得$\|g_0-h_k\|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此

$$\|g-h_k\|\leqslant\|g-g_0\|+\|g_0-h_k\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

这表明H是$\overline{T^*(B)}$的有限ε-网.

现在,由上面的证明及X^*的完备性知,$\overline{T^*(B)}$是完备的完全有界集. 应用第二章定理8.10,则得到$\overline{T^*(B)}$是X^*中的紧集. 因此T^*是紧算子. 定理得证. □

习 题

1. 设X和Y是赋范空间,$T:X\to Y$是线性算子. 证明:T是紧算子的充分必要条件是,对于每一个X中的有界序列$\{x_n\}$,$\{Tx_n\}$在Y中有收敛的子序列.

2. 设X和Y是赋范空间,$T:X\to Y$是线性算子,U是X中的单位开球. 证明:T是紧算子的充分必要条件是$\overline{T(U)}$是Y中的紧集.

3. 设X是无限维的Banach空间,$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$. 若T^{-1}存在, 则T^{-1}必是无界算子.

4. 证明本节定理3.5.

5. 定义算子$T_n:l^2\to l^2$使得对于每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$T_nx=(\xi_1,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots).$$

显然T_n是有界线性算子($n\in\mathrm{N}$). 试证:

(1) T_n是紧算子($n\in\mathrm{N}$).

(2) $\{T_n\}$强收敛于恒等算子I,即对于每一个$x\in l^2$, $T_nx\to x=Ix$.

此例说明Banach空间到Banach空间的强收敛的紧算子序列的极限未必

是紧算子.

6. 定义算子 $T: l^2 \to l^2$ 使得对于每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$Tx=\left(\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \cdots, \frac{1}{n}\xi_n, \cdots\right).$$

证明 T 是紧算子.

7. 定义算子 $T: l^2 \to l^2$ 使得对于每一个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$Tx=y=(\eta_1,\eta_2,\cdots),$$

这里

$$\eta_j=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{jk}\xi_k, \quad \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{jk}|^2<\infty.$$

证明 T 是紧算子.

§4 紧算子的谱

在算子的谱的研究中，仅仅有少数的几类算子现已取得一系列完整结果，紧算子就是其中的一类. 紧算子的谱的理论在现代积分方程理论中具有重要的地位. 本节介绍 F. Riesz 和 J. Schauder 关于紧算子的谱的一系列主要理论. 我们仍用 $\mathscr{B}_c(X, X)$ 表示赋范空间 X 到 X 的紧算子的全体.

引理 4.1 设 X 是赋范空间, $T\in\mathscr{B}_c(X,X)$. 对于每一个数 $\lambda\neq 0$, 算子 $\lambda I-T$ 的值域是 X 的闭子空间.

证明 记 $T_\lambda=\lambda I-T$. 假若 $T_\lambda(X)$ 不是 X 中的闭集，则存在 $y\in\overline{T_\lambda(X)}\setminus T_\lambda(X)$ 以及 $\{x_n\}\subset X$, 使得

$$y_n=T_\lambda x_n\to y. \tag{4.1}$$

易知 $T_\lambda(X)$ 是 X 的线性子空间, $\theta\in T_\lambda(X)$, 故 $y\neq\theta$. 于是存在 $n_0\in\mathbf{N}$, 使得对所有的 $n\geq n_0$ 皆有 $y_n\neq\theta$, 或者说 $x_n\notin\mathscr{N}(T_\lambda)$. 我们不妨设这一结论对所有的 n 都成立. 由于零空间 $\mathscr{N}(T_\lambda)$ 是闭的，故对每一个 $n\in\mathbf{N}$

$$\delta_n=\inf_{x\in\mathscr{N}(T_\lambda)}\|x_n-x\|>0.$$

由下确界的定义，存在 $z_n\in\mathcal{N}(T_\lambda)$，使得

$$a_n=\|x_n-z_n\|<2\delta_n. \tag{4.2}$$

现在我们证明 $a_n=\|x_n-z_n\|\to\infty$ $(n\to\infty)$. 假若此结论不成立，则$\{x_n-z_n\}$是一个有界序列. 由于T是紧算子，则 $\{T(x_n-z_n)\}$有一个收敛的子序列. 因 $\lambda\neq0$，易知 $I=\lambda^{-1}(T+T_\lambda)$ 注意到 $T_\lambda z_n=\theta$，我们有

$$x_n-z_n=\frac{1}{\lambda}(T+T_\lambda)(x_n-z_n)=\frac{1}{\lambda}[T(x_n-z_n)+T_\lambda x_n].$$

因此$\{x_n-z_n\}$有一个收敛的子序列$\{x_{n_k}-z_{n_k}\}$. 设 $x_{n_k}-z_{n_k}\to v$. 由 T_λ 的连续性知

$$T_\lambda x_{n_k}=T_\lambda(x_{n_k}-z_{n_k})\to T_\lambda v.$$

由(4.1)及极限的唯一性，得到 $T_\lambda v=y$. 于是 $y\in T_\lambda(X)$. 此与所设矛盾.

令 $w_n=\dfrac{1}{a_n}(x_n-z_n)$，则$\|w_n\|=1$. 由于 $a_n\to\infty$，$\{T_\lambda x_n\}$收敛以及 $T_\lambda z_n=\theta$，我们得到

$$T_\lambda w_n=\frac{1}{a_n}T_\lambda x_n\to\theta. \tag{4.3}$$

从 $I=\lambda^{-1}(T+T_\lambda)$可推得

$$w_n=\frac{1}{\lambda}(Tw_n+T_\lambda w_n). \tag{4.4}$$

考察(4.4)的右端. 由于T是紧算子且$\{w_n\}$有界，故序列$\{Tw_n\}$有一个收敛的子序列. 由(4.3)知$\{T_\lambda w_n\}$收敛. 因此$\{w_n\}$有一个收敛的子序列$\{w_{n_j}\}$. 设 $w_{n_j}\to w$. 由(4.3) 及极限的唯一性，得到 $T_\lambda w=\theta$，故 $w\in\mathcal{N}(T_\lambda)$. 对于每一个 $n\in\mathbb{N}$，因 $z_n\in\mathcal{N}(T_\lambda)$，故

$$u_n=z_n+a_nw\in\mathcal{N}(T_\lambda).$$

因此$\|x_n-u_n\|\geqslant\delta_n$. 于是从

$$\delta_n\leqslant\|x_n-(z_n+a_nw)\|=\|a_nw_n-a_nw\|$$

$$=a_n\|w_n-w\|<2\delta_n\|w_n-w\|$$

得到$\|w_n-w\|>\frac{1}{2}(n\in\mathbb{N})$，此与$w_{n_j}\to w$矛盾．引理得证．□

引理 4.2 设X是赋范空间，$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$，数$\lambda\neq0$．则对于每一个$y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$，方程

(4.5) $$(\lambda I-T)x=y$$

至少有一个解x满足

(4.6) $$\|x\|\leqslant c\|y\|,$$

其中c是一个与y无关的常数．

证明 设x_0和x是方程(4.5)的解．那末$(\lambda I-T)(x-x_0)=\theta$．我们固定$x_0$，令$z=x-x_0$，则方程(4.5)的解$x$可以表示为

(4.7) $$x=x_0+z,$$

其中$z\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$．反过来，对于每一个$z\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$，$x=x_0+z$都是方程(4.5)的解．对于此固定的$x_0$，令

$$h=\inf\{\|x_0+z\|\,|\,z\in\mathscr{N}(\lambda I-T)\}.$$

由下确界的定义，存在$z_n\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$使得

(4.8) $$\|x_0+z_n\|\to h\quad(n\to\infty).$$

因此$\{x_0+z_n\}$是有界的．因

$$\|z_n\|=\|(x_0+z_n)-x_0\|\leqslant\|x_0+z_n\|+\|x_0\|,$$

故$\{z_n\}$是有界的．由于T是紧算子，则$\{Tz_n\}$有收敛的子序列．注意到当$\lambda\neq0$时，$z_n\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$意味着$Tz_n=\lambda z_n$，我们可知$\{z_n\}$有一个收敛的子序列，设其为$\{z_{n_k}\}$且$z_{n_k}\to z_0$．因$\mathscr{N}(\lambda I-T)$是闭集，故$z_0\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$．由范数的连续性及(4.8)，我们得到

$$\|x_0+z_0\|=\lim_{k\to\infty}\|x_0+z_{n_k}\|=h.$$

上述证明表明，对每一个$y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$，对应于$y$的解集中包含一个最小范数的解$x'=x_0+z_0$，即$x'$满足$(\lambda I-T)x'=y$且$\|x'\|=\min\{\|x\|\,|\,(\lambda I-T)x=y\}$．

现在证明,存在一个与 y 无关的常数 c, 使得对于任意的 $y\in \mathscr{R}(\lambda I-T)$,其对应的最小范数的解 x' 满足(4.6). 假若这样的常数 c 不存在,则存在一个序列$\{y_n\}$使得

$$\frac{\|x_n'\|}{\|y_n\|}\to\infty \quad (n\to\infty), \tag{4.9}$$

这里 x_n' 满足$(\lambda I-T)x_n'=y_n$ 且$\|x_n'\|=\min\{\|x\| \mid (\lambda I-T)x=y_n\}$. 由于

$$\|\alpha x_n'\|=\min\{\|x\| \mid (\lambda I-T)x=\alpha y_n\},$$

容易看出,不失一般性可设(4.9)中的$\|x_n'\|=1$. 于是,由(4.9)式得到

$$\|y_n\|\to 0 \quad (n\to\infty). \tag{4.10}$$

由于$\{x_n'\}$是有界集以及 T 是紧算子, 则$\{Tx_n'\}$有一个收敛的子序列,设其为$\{Tx'_{n_k}\}$且 $Tx'_{n_k}\to v_0$. 令 $x_0'=\frac{1}{\lambda}v_0$,则

$$Tx'_{n_k}\to\lambda x_0' \quad (k\to\infty). \tag{4.11}$$

由 $y_n=(\lambda I-T)x_n'=\lambda x_n'-Tx_n'$ 以及(4.10)和(4.11),我们可得到

$$x'_{n_k}=\frac{1}{\lambda}(Tx'_{n_k}+y_{n_k})\to x_0' \quad (k\to\infty). \tag{4.12}$$

因 T 连续,故 $Tx'_{n_k}\to Tx_0'$. 由(4.11)及极限的唯一性,得到 $Tx_0'=\lambda x_0'$,即 $x_0'\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$. 由于$(\lambda I-T)x_n'=y_n$,我们令 $x=x_n'-x_0'$,则 x 满足$(\lambda I-T)x=y_n$. 而 x_n' 是具有最小范数的解,故

$$\|x\|=\|x_n'-x_0'\|\geqslant\|x_n'\|=1.$$

此与(4.12)所示的收敛性相矛盾. □

为了下面的定理的需要,我们给出赋范空间与它的对偶空间的元素之间或集合之间正交的概念.

定义 4.3 设 X 是赋范空间,X^* 是它的对偶空间.

(1) 对于 $x\in X, f\in X^*$,若 $f(x)=0$, 则称 x 与 f 正交(orthogonal),记为 $x\perp f$.

(2) 对于 $A\subset X, B\subset X^*$，若对于每一个 $x\in A$ 及每一个 $f\in B$ 都有 $x\perp f$，则称 A 与 B 正交，记为 $A\perp B$. 特别地，对于 $x\in X$，当 $\{x\}$ 与 B 正交时，称 x 与 B 正交，记为 $x\perp B$；对于 $f\in X^*$，当 A 与 $\{f\}$ 正交时，称 A 与 f 正交，记为 $A\perp f$.

定理 4.4 设 X 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$.

(1) 设 $y\in X$，数 $\lambda\neq 0$，则方程

$$(\lambda I-T)x=y \tag{4.5}$$

有解的充分必要条件是 $y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$，这里 I^* 是 X^* 上的恒等算子.

(2) 设 $g\in X^*$，数 $\lambda\neq 0$，则方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g \tag{4.13}$$

有解的充分必要条件是 $g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$

证明 (1) 必要性. 设方程 (4.5) 有解 x. 对于每一个 $f\in\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$，

$$\begin{aligned}f(y)&=f(\lambda x-Tx)=\lambda f(x)-f(Tx)\\&=\lambda f(x)-(T^*f)(x)=[(\lambda I^*-T^*)f](x)=0,\end{aligned}$$

故 $y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$.

充分性. 若 $y=\theta$，显然方程 (4.5) 有解 $x=\theta$. 现设 $y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*), y\neq\theta$. 易见方程(4.5)有解等价于算子 $\lambda I-T$ 的值域 $\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 包含 y. 故只要证明 $y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$. 假若 $y\notin\mathscr{R}(\lambda I-T)$，因 $\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 是 X 的闭子空间(见引理 4.1)，故 $h=\inf\{\|y-x\|\,|\,x\in\mathscr{R}(\lambda I-T)\}>0$. 由Hahn-Banach 定理之推论，存在 $f_0\in X^*$ 使得

$$f_0(y)=h,\ \|f_0\|=1 \text{且}\ f_0(z)=0\quad(z\in\mathscr{R}(\lambda I-T)).$$

因为，对于每一个 $x\in X$，有 $\lambda x-Tx\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$，故

$$(\lambda f_0-T^*f_0)(x)=f_0(\lambda x-Tx)=0.$$

于是 $\lambda f_0-T^*f_0=\theta$，或者说 $f_0\in\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$. 由假设 $y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*$

$-T^*)$，故 $f_0(y)=0$，此与 $f_0(y)=h>0$ 相矛盾.

(2) 必要性. 设方程(4.13)有解 f. 对于每一个 $x\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$，

$$g(x)=(\lambda f-T^*f)(x)=\lambda f(x)-f(Tx)$$
$$=f((\lambda I-T)x)=0,$$

故 $g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$.

充分性. 设 $g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$，$g\neq\theta$（$g=\theta$ 时结论显然成立）. 对于每一个 $y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$，则有 $x\in X$ 使得 $y=(\lambda I-T)x$. 在 $\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 上定义 f_0 使得

$$f_0(y)=g(x)\quad (y=(\lambda I-T)x\in\mathscr{R}(\lambda I-T)). \tag{4.14}$$

我们须指出，$f_0(y)$ 与满足 $y=(\lambda I-T)x$ 的 x 的选取无关，从而表明 f_0 确实是一个 $\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 上的泛函. 事实上，若又有一个 $x'\in X$ 满足 $y=(\lambda I-T)x'$，则 $x-x'\in\mathscr{N}(\lambda I-T)$. 因 $g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$，故 $g(x-x')=0$，即 $g(x)=g(x')$. 因此按(4.14)定义的 f_0 确实是一个泛函.

由于 $\lambda I-T$ 和 g 是线性的，易知 f_0 是线性的. 现在证明 f_0 是有界的. 由引理 4.2，对于每一个 $y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$，至少有一个对应的解 x（即 x 满足 $y=(\lambda I-T)x$），使得

$$\|x\|\leqslant c\|y\|,$$

这里常数 c 与 y 无关. 于是

$$|f_0(y)|=|g(x)|\leqslant\|g\|\|x\|\leqslant c\|g\|\|y\|.$$

因此 f_0 是有界的.

由 Hahn-Banach 定理，f_0 可以扩张为 X 上的有界线性泛函 f 且保持范数不变. 这样，对于每一个 $x\in X$，

$$[(\lambda I^*-T^*)f](x)=\lambda f(x)-f(Tx)=f((\lambda I-T)x)$$
$$=f_0((\lambda I-T)x)=g(x)$$

故 f 是方程(4.13)的解. □

定理4.5 设 X 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$，数 $\lambda\neq0$. 则 λ 是 T 的正则值的充分必要条件是下列二条件之一成立：

(1) $(\lambda I-T)X=X$，即 $\mathscr{R}(\lambda I-T)=X$；

(2) $(\lambda I-T)x=\theta$ 只有零解.

证明 我们先证明(1)与(2)的等价性. (1)⇒(2). 设(1)成立. 令

$$\mathscr{N}_n=\{x\in X\mid(\lambda I-T)^n x=\theta\}\quad(n\in\mathbf{N}).\tag{4.15}$$

由于 $(\lambda I-T)^n$ 是有界线性算子，故 $\mathscr{N}_n$ 是 X 的闭子空间. 由(4.15)易见

$$\mathscr{N}_1\subset\mathscr{N}_2\subset\cdots\subset\mathscr{N}_n\subset\cdots.$$

假若(2)不成立，则 $\mathscr{N}_1\setminus\{\theta\}\neq\varnothing$. 取 $x_1\in\mathscr{N}_1$，$x_1\neq\theta$. 由于(1)成立，则存在 $x_2\in X$ 使得 $(\lambda I-T)x_2=x_1$. 于是又存在 $x_3\in X$ 使得 $(\lambda I-T)x_3=x_2$. 依此类推，可得到一个点列 $\{x_n\}$，其中 $x_n=(\lambda I-T)x_{n+1}(n\in\mathbf{N})$. 因 $x_1\neq\theta$，故 $x_2\notin\mathscr{N}_1$. 但 $(\lambda I-T)^2x_2=(\lambda I-T)x_1=\theta$，可知 $x_2\in\mathscr{N}_2$. 因此 $\mathscr{N}_1$ 是 $\mathscr{N}_2$ 的真子空间. 依此类推，可以证明 $\mathscr{N}_n$ 是 $\mathscr{N}_{n+1}$ 的真子空间($n\in\mathbf{N}$). 由 Riesz 引理（第五章引理 3.7)，存在 $y_n\in\mathscr{N}_n$，使得 $\|y_n\|=1$ 且对于每一个 $z\in\mathscr{N}_{n-1}$ 有

$$\|y_n-z\|\geqslant\frac{1}{2}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

对于正整数 m,n，当 $m<n$ 时有 $\mathscr{N}_m\subset\mathscr{N}_{n-1}$. 由于 $y_m\in\mathscr{N}_m$，即

$$\theta=(\lambda I-T)^m y_m=(\lambda I-T)^{m-1}(\lambda I-T)y_m,$$

我们得到 $(\lambda I-T)y_m\in\mathscr{N}_{m-1}\subset\mathscr{N}_{n-1}$. 因此 $Ty_m=\lambda y_m-(\lambda I-T)y_m\in\mathscr{N}_{n-1}$. 同样又有 $(\lambda I-T)y_n\in\mathscr{N}_{n-1}$，故

$$z_0=\frac{1}{\lambda}[(\lambda I-T)y_n-Ty_m]\in\mathscr{N}_{n-1}.$$

所以当 $m<n$ 时，

$$\|Ty_n-Ty_m\|=\|\lambda y_n-(\lambda I-T)y_n-Ty_m\|$$

$$= |\lambda| \|y_n - z_0\| \geqslant \frac{1}{2}|\lambda|.$$

由此可见，$\{y_n\}$是有界的，但$\{Ty_n\}$不存在收敛的子序列．此与T是紧算子矛盾．因此(2)成立．

(2)⇒(1)．设(2)成立，即$\mathscr{N}(\lambda I-T)=\{\theta\}$．于是对于每一个$g\in X^*$都有$g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$．由定理4.4 (2)，对于每一个$g\in X^*$，方程$(\lambda I^*-T^*)f=g$都有解，即$(\lambda I^*-T^*)X^*=X^*$．将上面(1)⇒(2)的证明过程用于算子$\lambda I^*-T^*$，则可得到方程$(\lambda I^*-T^*)f=\theta$只有零解．于是对于每一个$y\in X$都有$y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$．由定理4.4(1)，对于每一个$y\in X$，方程$(\lambda I-T)x=y$都有解，即$(\lambda I-T)X=X$．因此(1)成立．

现设λ是T的正则值，显然(1)与(2)都成立．反之，若(1)与(2)中之一成立，则(1)与(2)皆成立．这时$\lambda I-T$是X到X上的双射．由假设X是完备的，应用逆算子定理(第六章定理6.7)，$\lambda I-T$的逆算子是有界的．因此λ是T的正则值．□

Riesz-Schauder 理论中关于紧算子的谱的主要结论可以表达在下面的定理中．

定理 4.6　设X是Banach空间，$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$．则

(1) 当X是无限维空间时，θ必是T的谱点．

(2) T的非零谱点必是T的特征值，即对于任何数$\lambda\neq 0$，或者λ是T的正则值，或者当λ不是T的正则值时，λ必是T的特征值．

(3) 当数$\lambda\neq 0$且λ是T的特征值时，对应于λ的特征向量空间$E_\lambda(T)$是有限维的．

(4) T的谱$\sigma(T)$或者是有限集或者是仅以零为其聚点的可数集．

证明　(1) 当X是无限维空间时，假若$\theta\notin\sigma(T)$，则T^{-1}就

是有界线性算子. 由定理 3.6 知, $I=T^{-1}T$ 是紧算子, 此与 § 3 例 1 的结论矛盾.

(2) 设 $\lambda\neq 0$ 且 λ 不是 T 的正则值. 由定理 4.5(2), $(\lambda I-T)x=\theta$ 有非零解, 故 λ 是 T 的特征值.

(3) 设 $\lambda\neq 0$ 且 λ 是 T 的特征值. 对于任一 $x\in E_\lambda(T)$, 有 $Tx=\lambda x$. 设 M 是 $E_\lambda(T)$ 中的单位闭球, $\{x_n\}$ 是 M 中的任一序列. 由于 T 是紧算子, 则 $\{Tx_n\}$ 有一个收敛的子序列, 设其为 $\{Tx_{n_j}\}$ 且 $Tx_{n_j}\to x_0$. 注意到 $E_\lambda(T)$ 是 X 的闭子空间, 我们得到

$$x_{n_j}=\frac{1}{\lambda}Tx_{n_j}\to\frac{1}{\lambda}x_0\in E_\lambda(T).$$

这表明 $E_\lambda(T)$ 中的单位闭球 M 是列紧的, 从而 M 是 $E_\lambda(T)$ 中的紧集. 由第五章定理 3.8 知, $E_\lambda(T)$ 是有限维的.

(4) 我们只要证明, 对于每一个 $c>0$, 集

$$\{\lambda\in\sigma(T)\mid|\lambda|\geqslant c\}$$

是有限的. 假若此结论不成立, 则存在 $c_0>0$ 以及无限多个互不相同的 $\lambda_n\in\sigma(T)$ 满足 $|\lambda_n|\geqslant c_0(n\in\mathbb{N})$. 由(2)知, 每一个 λ_n 都是 T 的特征值. 对于每一个 λ_n, 设 x_n 是其对应的一个特征向量. 由定理 2.4, 所有的这些 x_n 的全体组成一个线性无关集. 令

$$M_n=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_n\}\quad(n\in\mathbb{N}).$$

则 M_n 是 X 的闭子空间且 M_n 是 M_{n+1} 的真子空间 $(n\in\mathbb{N})$. 由 Riesz 引理 (第五章引理 3.7), 存在一个序列 $\{y_n\}$ 使得 $y_n\in M_n$, $\|y_n\|=1$ 且对于每一个 $x\in M_{n-1}$ 皆有 $\|y_n-x\|\geqslant\frac{1}{2}$.

下面, 我们考虑

$$Ty_n-Ty_m=\lambda_ny_n-(\lambda_ny_n-Ty_n+Ty_m).$$

不妨设 $m<n$. 这时 $y_m\in M_m\subset M_{n-1}=\operatorname{span}\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}$. 可设

$$y_m=\alpha_1^{(m)}x_1+\cdots+\alpha_{n-1}^{(m)}x_{n-1}.$$

注意到 $Tx_j=\lambda_jx_j(j\in\mathbb{N})$, 我们得到

$$Ty_m=\alpha_1^{(m)}\lambda_1x_1+\cdots+\alpha_{n-1}^{(m)}\lambda_{n-1}x_{n-1}\in M_{n-1}.$$

对于 $y_n=\alpha_1^{(n)}x_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}x_n\in M_n$，我们又有

$$\begin{aligned}\lambda_ny_n-Ty_n&=\lambda_n(\alpha_1^{(n)}x_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}x_n)\\&\quad-(\alpha_1^{(n)}\lambda_1x_1+\cdots+\alpha_n^{(n)}\lambda_nx_n)\\&=\alpha_1^{(n)}(\lambda_n-\lambda_1)x_1+\cdots\\&\quad+\alpha_{n-1}^{(n)}(\lambda_n-\lambda_{n-1})x_{n-1}\in M_{n-1}.\end{aligned}$$

令 $X=\frac{1}{\lambda_n}(\lambda_ny_n-Ty_n+Ty_m)$. 则$X\in M_{n-1}$，于是

$$\begin{aligned}\|Ty_n-Ty_m\|&=\|\lambda_ny_n-\lambda_nx\|=|\lambda_n|\,\|y_n-x\|\\&\geqslant\frac{1}{2}|\lambda_n|\geqslant\frac{1}{2}c_0.\end{aligned}$$

这表明$\{Ty_n\}$没有收敛的子序列，此与 T 是紧算子且$\{y_n\}$是有界集的事实相矛盾. □

Riesz-Schauder 理论中关于紧算子 T 与 T^* 之间的关系的主要结论归纳在下面的定理之中.

定理 4.7 设 X 是 Banach 空间，$T\in\mathscr{B}_c(X,X)$，则

(1) $\sigma(T)=\sigma(T^*)$.

(2) 若 $\lambda\in\sigma(T)$(或 $\sigma(T^*)$)且 $\lambda\neq0$，则 λ 必是 T 同时也必是 T^* 的特征值. 对应于同一非零特征值 λ 的特征向量空间 $E_\lambda(T)$ 与 $E_\lambda(T^*)$具有相同的维数.

(3)若 λ 和 μ ($\lambda\neq\mu$)分别是 T 和 T^* 的特征值，则特征向量空间 $E_\lambda(T)$与 $E_\mu(T^*)$正交，即 $E_\lambda(T)\perp E_\mu(T^*)$.

(4) 设 $y\in X$, $\lambda\neq0$，则方程

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解的充分必要条件是 $y\perp\mathscr{N}(\lambda I^*-T^*)$.

(5) 设 $g\in X^*$, $\lambda\neq0$，则方程

$$(\lambda I^*-T^*)f=g$$

有解的充分必要条件是 $g\perp\mathscr{N}(\lambda I-T)$.

证明 结论(4)和(5)就是定理 4.4.

(1) 只要证明 $\rho(T)=\rho(T^*)$. 对于任意 $\lambda\in\rho(T)$, 则 $(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(X,X)$. 对算子 $\lambda I-T$ 应用第六章定理 3.6, 我们得到

$$((\lambda I-T)^{-1})^*=((\lambda I-T)^*)^{-1}=(\lambda I^*-T^*)^{-1}.$$

故 $\lambda\in\rho(T^*)$. 这就证明了 $\rho(T)\subset\rho(T^*)$.

现证相反的包含关系成立. 对于任意 $\lambda\in\rho(T^*)$, 由上面的证明可得到 $\lambda\in\rho(T^{**})$. 这时 $\lambda I^{**}-T^{**}$ (这里 I^{**} 是 X^{**} 上的恒等映射)是 X^{**}到 X^{**}上的双射. 由于 $\lambda I^{**}-T^{**}=(\lambda I-T)^{**}$, 而$(\lambda I-T)^{**}$可以看作为 $\lambda I-T$ 的扩张 (见第六章定理 3.7), 故 $\lambda I-T$ 是 X 上的单射. 现在我们证明 $\mathscr{R}(\lambda I-T)=X$. 假若 $\mathscr{R}(\lambda I-T)\neq X$, 由于$\mathscr{R}(\lambda I-T)$是$X$的闭线性子空间, 则存在非零的 $f\in X^*$ 使得 f 在$\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 上的值都为零. 即对于每一个 $x\in X$

$$\begin{aligned}0&=f((\lambda I-T)x)=((\lambda I-T)^*f)(x)\\&=((\lambda I^*-T^*)f)(x)\end{aligned}$$

从而

$$(\lambda I^*-T^*)f=\theta.$$

因此 $\lambda\in\sigma(T^*)$,此与 $\lambda\in\rho(T^*)$的假设相矛盾. 这样, 我们证明了 $\lambda I-T$ 是X到X 上的双射. 由逆算子定理便得到 $\lambda\in\rho(T)$. 这就证明了 $\rho(T^*)\subset\rho(T)$. 因此 $\rho(T)=\rho(T^*)$.

(2) 在(1)中已证明 $\sigma(T)=\sigma(T^*)$. 应用定理 4.6(2)立即得到: 若 $\lambda\in\sigma(T)$(或 $\sigma(T^*)$)且 $\lambda\neq0$,则 $\lambda\in\sigma_p(T)$ 且 $\lambda\in\sigma_p(T^*)$. 关于对应于同一非零特征值 λ 的特征向量空间 $E_\lambda(T)$ 与 $E_\lambda(T^*)$ 具有相同维数的证明,还需用一些篇幅,这里从略.

(3) 对于任意 $x\in E_\lambda(T)$及 $f\in E_\mu(T^*)$,有

$$\lambda f(x)=f(\lambda x)=f(Tx)=(T^*f)(x)=\mu f(x).$$

因 $\lambda\neq\mu$, 故 $f(x)=0$. 因此 $E_\lambda(T)\perp E_\mu(T^*)$. □

从上面讨论的 Riesz-Schauder 理论的主要结论, 若将无限维赋范线性空间上紧算子的谱理论(见定理 4.6) 与有限维赋范线性空间上的矩阵的特征值理论加以比较, 我们可发现它们之间有很多相类似之处.

设 X 是赋范空间, $T\in\mathscr{B}_c(X,X)$, $\lambda\neq 0$. 考虑如下的算子方程

(A) $$(\lambda I-T)x=y,$$

(B) $$(\lambda I-T)x=\theta,$$

(C) $$(\lambda I^*-T^*)f=g,$$

(D) $$(\lambda I^*-T^*)f=0.$$

应用 Riesz-Schauder 理论, 我们来研究上面四个方程的可解性的内在关系. 定理 4.4(或定理 4.7)表明了如下的关系:

(I) 方程(A)有一个解 x 当且仅当对于所有齐次方程(D)的解 f 皆有 $f(y)=0$. 因此, 若齐次方程(D) 仅有唯一的解 $f=0$, 则对于每一个 $y\in X$ 方程(A)皆有解 x.

(II) 方程(C) 有一个解 f 当且仅当对于所有齐次方程(B)的解 x 皆有 $g(x)=0$. 因此, 若齐次方程(B)仅有唯一的解 $x=\theta$, 则对于每一个 $g\in X^*$ 方程(C)皆有解 f.

下面的定理指出了方程(A)与(B)和方程(C)与(D)的可解性之间的内在关系.

定理 4.8 设 X 是赋范空间, $T\in\mathscr{B}_c(X,X)$, $\lambda\neq 0$, 则

(a) 方程(A) 对于每一个 $y\in X$ 有解的充分必要条件是齐次方程 (B) 有唯一的零解. 在这种情况下, 方程 (A) 的解是唯一的.

(b) 方程(C)对于每一个 $g\in X^*$ 有解的充分必要条件是齐次方程 (D) 有唯一的零解. 在这种情况下, 方程 (C) 的解是唯

一的.

证明 (a) 必要性. 假若齐次方程(B)还有一个解 $x_1\neq 0$. 由于方程(A)对于每一个 $y\in X$ 有解, 令 $y=x_1$, 则存在 $x_2\in X$ 满足 $(\lambda I-T)x_2=x_1$. 同样, 存在 $x_3\in X$ 满足 $(\lambda I-T)x_3=x_2$. 如此继续下去,我们可以得到一个序列 $\{x_n\}$ 满足如下性质:

$$0\neq x_1=(\lambda I-T)x_2=(\lambda I-T)^2x_3=\cdots=(\lambda I-T)^{k-1}x_k,$$

$$0=(\lambda I-T)x_1=(\lambda I-T)^2x_2=\cdots=(\lambda I-T)^k x_k.$$

记 $\mathscr{N}_k=\mathscr{N}((\lambda I-T)^k)(k\in\mathbf{N})$. 因此 $x_k\in\mathscr{N}_k$ 但 $x_k\notin\mathscr{N}_{k-1}(k=2,3,\cdots)$. 这表明 $\mathscr{N}_{k-1}$ 是 $\mathscr{N}_k$ 的真子空间. 完全类似于定理 4.5中的证明方法, 我们可导出矛盾的结果. 因此齐次方程 (B) 仅有零解.

充分性. 设齐次方程 (B) 仅有零解 $x=\theta$. 根据此定理前面的结论(II)知,对于每一个 $g\in X^*$方程(C) 皆有解 f. 因 T^*也是紧算子, 由必要性部分的证明,我们得到方程(D)仅有零解 $f=0$. 再根据此定理前面的结论(I)知,对于每一个 $y\in X$ 方程(A) 皆有解 x.

方程(A)的解的唯一性是明显的.

(b) 因T^*是紧算子,由(a)则(b)得证. □

现在我们把这一理论应用于第二类型的 Fredholm 积分方程

$$\lambda x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds=y(t) \tag{4.16}$$

(这里 $\lambda\neq 0, K(t,s)$在$[a,b]\times[a,b]$上连续). 令

$$(Tx)(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds.$$

则算子T是紧算子(见§3 例2),并且

$$(\lambda I-T)x(t)=y(t).$$

因此,我们得到的结论(I)、(II)以及定理 4.8 的(a)和(b) 完全适

用于第二类型的Fredholm积分方程. 这就是所谓积分方程的"Fredholm交替理论". 它对于第二类型的Fredholm积分方程解的存在性及唯一性的研究有重大的价值.

习　题

1. 设数列$\{a_n\}$在闭区间$[0,1]$中稠密. 定义算子$T: l^2\to l^2$使得对于每一个$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^2$,

$$Tx=(a_1\xi_1, a_2\xi_2,\cdots).$$

证明T不是紧算子.

2. 定义算子$T: C[0,1]\to C[0,1]$使得对于每一个$x\in C[0,1]$

$$(Tx)(t)=tx(t).$$

证明T不是紧算子. (参见§1习题1的结论.)

3. 设X是赋范空间, $T\in\mathscr{B}_0(X,X)$, $\lambda\neq 0$. 记算子$(\lambda I-T)^n$的零空间为$\mathscr{N}_n$, 即

$$\mathscr{N}_n=\mathscr{N}((\lambda I-T)^n)\quad (n\in\mathbf{N}).$$

证明: (1) $\dim\mathscr{N}_1<+\infty$,

(2) $\dim\mathscr{N}_n<+\infty$ $(n\in\mathbf{N})$. (提示: 对$(\lambda I-T)^n$作二项式展开, 再应用(1)的结论.)

4. 设X是赋范空间, $T\in\mathscr{B}_0(X,X)$, $\lambda\neq 0$. 令

$$\mathscr{N}_n=\mathscr{N}((\lambda I-T)^n)\quad (n\in\mathbf{N}).$$

证明: 在包含关系式$\mathscr{N}_1\subset\mathscr{N}_2\subset\cdots\subset\mathscr{N}_n\subset\cdots$中, 必存在某个正整数$m$使得从$m$开始皆有

$$\mathscr{N}_m=\mathscr{N}_{m+1}=\mathscr{N}_{m+2}=\cdots.$$

§5　自伴算子的谱

在本节中, 我们总假定H是复Hilbert空间. 我们将讨论H上的自伴算子的谱的特性. 按照第七章§5中的定义, H上的自伴算子T是H到H的有界线性算子并且$T=T^*$, 这里T^*是T的Hilbert伴随算子. 由于对于任意x、$y\in H$, 有

$$(Tx,y)=(x,T^*y),$$

因此，有界线性算子T是H上的自伴算子的充分必要条件是，对于任意x、$y\in H$有

$$(Tx,y)=(x,Ty).$$

在研究自伴算子的谱之前，我们须指出自伴算子T可能没有特征值(见习题1)．然而，若T有特征值，则T的特征值及其对应的特征向量有下面的特性．

定理 5.1 设H是复 Hilbert 空间，T是H上的自伴算子，则

(1) T的所有特征值(若T有特征值的话)都是实数；

(2) T的不同的特征值所对应的特征向量互相正交．

证明 (1) 设λ是T的特征值，x是λ所对应的特征向量．因此$x\neq\theta$且$Tx=\lambda x$．因T是自伴算子，则(Tx,x)是实数．而$(x,x)=\|x\|^2$也是实数，故由下式

$$(Tx,x)=(\lambda x,x)=\lambda(x,x)$$

即可知λ是实数．

(2) 设λ和μ是T的特征值，$\lambda\neq\mu$．x和y分别是λ和μ对应的特征向量，因而

$$Tx=\lambda x, Ty=\mu y.$$

由于T是自伴算子，T的特征值都是实数，故

$$\begin{aligned}\lambda(x,y)&=(Tx,y)=(x,Ty)\\&=(x,\mu y)=\mu(x,y).\end{aligned}$$

因$\lambda\neq\mu$，故$(x,y)=0$，即$x\perp y$．　□

定理 5.2 设T是复 Hilbert 空间H上的自伴算子．则λ是T的正则值的充分必要条件是存在$c>0$，使得对每一个$x\in H$皆有

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant c\|x\|. \tag{5.1}$$

证明 “⇒”若λ是T的正则值，则$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$．记$\|(\lambda I-T)^{-1}\|=m$．因$(\lambda I-T)^{-1}\neq 0$，故$m>0$．对于每一个$x\in H$，

我们有

$$\|x\|=\|(\lambda I-T)^{-1}(\lambda I-T)x\|\leqslant m\|(\lambda I-T)x\|.$$

令$c=\dfrac{1}{m}$，则(5.1)式得证.

"$\Leftarrow$"设存在 $c>0$，使得(5.1)式对于每一个 $x\in H$ 皆成立. 若 $(\lambda I-T)x=\theta$，由(5.1)式有

$$0=\|(\lambda I-T)x\|\leqslant c\|x\|,$$

则可推出 $x=\theta$. 这表明 $\lambda I-T$ 是单射，或者说 λ 不是 T 的特征值.

下面我们只要证明 $\lambda I-T$ 的值域$\mathscr{R}(\lambda I-T)=H$，从而 $\lambda I-T$ 就是双射，故由逆算子定理，$(\lambda I-T)^{-1}\in\mathscr{B}(H,H)$，即 λ 是正则值的结论得证. 为了证明$\mathscr{R}(\lambda I-T)=H$，我们只要证明以下两点.

(a) $\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=H$. 设$x_0\perp\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}$，从而$x_0\perp\mathscr{R}(\lambda I-T)$. 因此对于任意 $x\in H$

$$0=((\lambda I-T)x,x_0)=\lambda(x,x_0)-(Tx,x_0).$$

由于 T 是自伴算子，我们得到

$$(x,Tx_0)=(Tx,x_0)=(x,\bar{\lambda}x_0),$$

故 $Tx_0=\bar{\lambda}x_0$. 我们断言必有 $x_0=\theta$. 因为假若 $x_0\neq\theta$，则 $\bar{\lambda}$ 是T 的特征值. 由定理 5.1(1)，$\bar{\lambda}$ 是实数，故 $\lambda=\bar{\lambda}$，此与 λ 不是 T 的特征值的结论矛盾. 这样，我们证得

$$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}^{\perp}=\{\theta\}.$$

根据第七章推论 2.11，便得到$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=H$.

(b) $\mathscr{R}(\lambda I-T)$是H中的闭集. 设$y\in\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}$，则存在$x_n\in H(n\in\mathbf{N})$使得

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)x_n=y.$$

因而收敛序列$\{(\lambda I-T)x_n\}$是 Cauchy 序列. 由于

$$\|(\lambda I-T)x_n-(\lambda I-T)x_m\|\geqslant c\|x_n-x_m\|,$$

可知$\{x_n\}$是H中的 Cauchy 序列. 而H是完备的,故存在 $x\in H$ 使得 $x_n\to x$. 因此

$$(\lambda I-T)x=\lim_{n\to\infty}(\lambda I-T)x_n=y.$$

由此可知$y\in\mathscr{R}(\lambda I-T)$.

综上所证,我们得到

$$\mathscr{R}(\lambda I-T)=\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}=H.$$

此定理得证. □

定理 5.3 若T是复 Hilbert 空间H上的自伴算子,则T的谱$\sigma(T)$完全落在实轴上.

证明 只要证明对于任意 $\lambda=\alpha+i\beta$, 其中 α、$\beta\in\mathbb{R}$ 且 $\beta\neq 0$, 皆有 $\lambda\in\rho(T)$即可.

对于H中任意非零元素 x,有

$$((\lambda I-T)x,x)=\lambda(x,x)-(Tx,x).$$

由于(x,x)与(Tx,x)都是实数,于是

$$\overline{((\lambda I-T)x,x)}=\overline{\lambda}(x,x)-(Tx,x).$$

两式相减,以记号 Im表示复数的虚部,则得到

$$2i\mathrm{Im}((\lambda I-T)x,x)=(\lambda-\overline{\lambda})(x,x)=2i\beta\|x\|^2.$$

上式两端取绝对值,再应用 Schwarz 不等式,得到

$$|\beta|\,\|x\|^2\leqslant|((\lambda I-T)x,x)|\leqslant\|(\lambda I-T)x\|\,\|x\|.$$

因 $x\neq\theta$, 上式两端同除以$\|x\|$得

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant|\beta|\,\|x\|.$$

因 $\beta\neq 0$, 应用定理 5.2,我们便得到 $\lambda\in\rho(T)$. 定理得证. □

在下面的定理中,我们将更为仔细地讨论自伴算子的谱的一些特性.

定理5.4 若T是复 Hilbert 空间H上的自伴算子,则T的谱完全落在实轴上的闭区间$[m,M]$中,这里

$$(5.2)\qquad m=\inf_{\|x\|=1}(Tx,x)\quad M=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x).$$

证明 由定理 5.3 知，$\sigma(T)$ 在实轴上．对于任意 $c>0$，我们证明 $\lambda=M+c\in\rho(T)$．

对于H中任意非零元素 x，令 $v=\frac{x}{\|x\|}$．于是$x=\|x\|v$并且

$$\begin{aligned}(Tx,x)&=\|x\|^2(Tv,v)\leqslant\|x\|^2\sup_{\|y\|=1}(Ty,y)\\&=(x,x)M.\end{aligned}$$

因此$-(Tx,x)\geqslant-(x,x)M$．应用 Schwarz 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}\|(\lambda I-T)x\|\|x\|&\geqslant((\lambda I-T)x,x)\\&=\lambda(x,x)-(Tx,x)\geqslant\lambda(x,x)-M(x,x)\\&=(\lambda-M)(x,x)=c\|x\|^2\end{aligned}$$

因$x\neq\theta$，两端同除以$\|x\|$得

$$\|(\lambda I-T)x\|\geqslant c\|x\|.$$

应用定理 5.2，即可得 $\lambda\in\rho(T)$．

同样可证：若 $\lambda<m$ 则 $\lambda\in\rho(T)$．因此 $\sigma(T)\subset[m,M]$．　□

定理 5.5 若T是复 Hilbert 空间H上的自伴算子，m 和M是(5.2)中定义的两个实数，则

$$\|T\|=\max(|m|,|M|)=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|.$$

证明 容易看出

$$\max(|m|,|M|)=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|.$$

令 $K=\max(|m|,|M|)$．由 Schwarz 不等式，

$$(5.3)\qquad K=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\|x\|=\|T\|.$$

另一方面，对于任意H中范数为 1 的元素 y，我们证明

$$(5.4)\qquad \|Ty\|\leqslant K.$$

若 $Ty=\theta$，则(5.4)式成立．现设 $Ty\neq\theta$．令

$$v=\|Ty\|^{\frac{1}{2}}y,\quad w=\|Ty\|^{-\frac{1}{2}}Ty.$$

则$\|v\|^2=\|w\|^2=\|Ty\|$. 注意到如下事实：对于H中任意非零元素u,记$u_0=\frac{u}{\|u\|}$,则有$u=\|u\|u_0$且

$$\begin{aligned}|(Tu,u)|&=\|u\|^2|(Tu_0,u_0)|\\&\leqslant\|u\|^2\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|=K\|u\|^2.\end{aligned}$$

而T是自伴算子,我们可直接推得

$$\begin{aligned}\|Ty\|^2&=\frac{1}{2}[(Ty,Ty)+(T^2y,y)]\\&=\frac{1}{2}[(Tv,w)+(Tw,v)]\\&=\frac{1}{4}|(T(v+w),v+w)-(T(v-w),v-w)|\\&\leqslant\frac{1}{4}[|(T(v+w),v+w)|+|T(v-w),v-w)|]\\&\leqslant\frac{1}{4}K(\|v+w\|^2+\|v-w\|^2)\\&\leqslant\frac{1}{2}K(\|v\|^2+\|w\|^2)\\&=K\|Ty\|.\end{aligned}$$

因此$\|Ty\|\leqslant K$.此不等式对于任意H中范数为1的元素y皆成立,从而

$$\|T\|\leqslant K. \tag{5.5}$$

由不等式(5.3)及(5.5)便可得到

$$\|T\|=K=\max(|m|,|M|)=\sup_{\|x\|=1}|(Tx,x)|.\qquad\square$$

定理 5.6 若T是复 Hilbert 空间H上的自伴算子,m和M是(5.2)中定义的两个实数,则m和M都是T的谱点.

证明 我们来证 $M\in\sigma(T)$. 首先指出两个显而易见的结论:

对于取定的实数 K,(1) 若 T 是自伴算子，则 $KI+T$ 也是自伴算子;(2) $\mu\in\sigma(T)$ 当且仅当 $\mu+K\in\sigma(KI+T)$(即 $\sigma(KI+T)$ 是 $\sigma(T)$ 的平移). 因此不失一般性可设

$$0\leqslant m\leqslant M.$$

由定理 5.5,可得

$$M=\sup_{\|x\|=1}(Tx,x)=\|T\|.$$

由上确界的定义,任取一列单调下降趋于 0 的正数 $\{\delta_n\}$,则对于每一个 δ_n,存在点列 $\{x_n\}\subset H$, $\|x_n\|=1$,使得

$$(Tx_n,x_n)>M-\delta_n.$$

由于

$$\|Tx_n\|\leqslant\|T\|\|x_n\|=\|T\|=M,$$

于是

$$\begin{aligned}\|Mx_n-Tx_n\|^2&=(Mx_n-Tx_n,Mx_n-Tx_n)\\&=M^2\|x_n\|^2-2M(Tx_n,x_n)+\|Tx_n\|^2\\&\leqslant M^2\|x_n\|^2-2M(M-\delta_n)+M^2\\&=2M\delta_n,\end{aligned}$$

即 $\|(MI-T)x_n\|\to0$. 由定理 5.2 知 $M\notin\rho(T)$,从而 $M\in\sigma(T)$. 类似地可以证明 $m\in\sigma(T)$. □

有界线性算子 T 的谱 $\sigma(T)$ 是三个互不相交的集合（即点谱 $\sigma_p(T)$,连续谱 $\sigma_c(T)$ 和剩余谱 $\sigma_r(T)$)之并. 在本章§1 中，我们已经知道，在有限维线性空间中的线性算子 T（它对应于一个矩阵)的谱 $\sigma(T)=\sigma_p(T)$,或者说 $\sigma_c(T)=\sigma_r(T)=\varnothing$. 在下面的定理中,我们将证明,自伴算子的剩余谱是空集.

定理 5.7 若 T 是复 Hilbert 空间 H 上的自伴算子,则 T 的剩余谱 $\sigma_r(T)=\varnothing$.

证明 假若 $\sigma_r(T)\neq\varnothing$,可设 $\lambda\in\sigma_r(T)$. 由剩余谱的定义知,

算子 $\lambda I-T$ 是可逆的，然而它的值域$\mathscr{R}(\lambda I-T)$ 在H中不稠密，即$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}\neq H$. 由第七章推论2.10,

$$H=\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}\oplus\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}^{\perp},$$

故在$\overline{\mathscr{R}(\lambda I-T)}^{\perp}$中存在非零元素 y. 于是$y\perp\mathscr{R}(\lambda I-T)$，即对每一个 $x\in H$,

$$((\lambda I-T)x,y)=0. \tag{5.6}$$

由于λ是实数(见定理 5.3)，T是自伴算子，从而 $\lambda I-T$ 也是自伴算子，故对每一个 $x\in H$ 由(5.6)式得到

$$(x,(\lambda I-T)y)=0.$$

令 $x=(\lambda I-T)y$. 则由上式得到$\|(\lambda I-T)y\|^2=0$，于是

$$(\lambda I-T)y=\theta.$$

因 $y\neq\theta$，故λ 是T的特征值，此与 $\lambda\in\sigma_r(T)$相矛盾. 这就证明了 $\sigma_r(T)=\varnothing$. □

习　题

1. 设算子 $T: L^2[0,1]\to L^2[0,1]$定义为

$$(Tx)(t)=tx(t).$$

证明T是 $L^2[0,1]$上的自伴算子且没有特征值.

2. 在定理 5.6 中补上 $m\in\sigma(T)$的证明.

3. 设T是 Hilbert 空间H上的自伴算子. 证明：若 $T\geqslant 0$ (即对于每一个 $x\in H$ 皆有$(Tx,x)\geqslant 0$)，则$(I+T)^{-1}$ 存在.

4. 设H是复 Hilbert 空间，$H\neq\{\theta\}$. 若H上的自伴算子T又是紧算子，则

(1) T至少有一个特征值；

(2) 若T没有异于零的特征值，则 $T=0$.

索　　引

（说明：数码 1—2 表示第一章 § 2；4—0 表示第四章 § 1 以前，其余类推）

一　画

二　画

三　画

四　画

五　画

六　画

七　画

八　画

九 画

十 画

十 一 画

十 二 画

十三画以上

常见人名表

常 用 符 号

$\varnothing$	空集	1-1
$\mathscr{D}(f)$	映射 f 的定义域	1-2
$\mathscr{R}(f)$	映射 f 的值域	1-2
f^{-1}	双射 f 的逆映射	1-2
$\mathscr{P}(A)$	集 A 的所有子集组成的集	1-4
$A\times B$	集 A 与集 B 的直积	1-5
$\underset{\alpha\in D}{\times} A_\alpha$	指标集 D 的集族 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ 的直积	1-5
$C[a,b]$	$[a,b]$ 上所有连续函数的全体组成的集	2-1
$B(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的开球	2-2
$\widetilde{B}(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的闭球	2-2
$s(x_0,r)$	以 x_0 为中心 r 为半径的球面	2-2
inf	下确界	2-2
sup	上确界	2-2
A°	集 A 的内部	2-2
A'	集 A 的导集	2-2
$\bar{A}$	集 A 的闭包	2-2
mE	集 E 的测度	3-1
m^*E	集 E 的外测度	3-1
R^*	扩张的实直线	3-3
$1_E(x)$	集 E 的特征函数	3-3
$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$	f_n 的上极限	3-3
$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} f_n$	f_n 的下极限	3-3
$(a.e.)$	几乎处处	3-3
f^+	f 的正部	3-3
f^-	f 的负部	3-3
$f_n \xrightarrow{m} f$	f_n 依测度收敛于 f	3-4
E_x	集 E 关于 x 的截口	4-4

参考文献

1. 江泽坚，吴智泉，实变函数论．人民教育出版社，1959.

2. И. П. Натансон，实变函数论（徐瑞云译）．人民教育出版社，1958.

3. 夏道行，吴卓人，严绍宗，舒五昌，实变函数论与泛函分析．人民教育出版社，1979.

4. 郑维行，王声望，实变函数与泛函分析概要．人民教育出版社，1980.

5. 程其襄等，实变函数与泛函分析基础．高等教育出版社，1983.

6. 周民强，实变函数．北京大学出版社，1985.

7. 龚怀云，寿纪麟，王绵森，应用泛函分析．
西安交通大学出版社，1985.

8. 李延保，楼宇同，应用泛函基础．南京工学院出版社，1987.

9. J. P. Aubin, *Applied Functional Analysis. John Wiley & Sons, New York*, 1979.

10. E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley & Sons, New York*, 1973.

11. B. V. Limaye, *Functional Analysis. Wiley Eastern Ltd., New Delhi*, 1981.

12. A. Mukherjea *and* K. Pothoven, *Real and Functional Analysis. (2nd. ed). Plenum Press, New York*, 1984.

13. J. T. Oden, *Applied Functional Analysis. Englewood Cliffs, Prentice-Hall*, 1979.

14. H. L. Royden, *Real Analysis. MacMillan, New York*, 1963.

15. W. Rudin, *Real and Complex Analysis. McGraw*-Hill, *New York*, 1966.

16. W. Rudin, *Functional Analysis. McGraw-Hill, New York*, 1973.

17. A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis. John Wiley & Sons, New York*, 1958.

18. K. Yosida, *Functional Analysis*. *Springer-Verlag, Berlin, New York*, 1965.

19. A. C. Zaanen, *Linear Analysis*. *North-Holland, Amsterdam*, 1960.